4 Aplicações da Derivação

Pichugin Dmitry/Shutterstock

O cálculo que você irá aprender neste capítulo lhe permitirá explicar a localização do arco-íris no céu e a razão pela qual as cores no arco-íris secundário aparecerem na ordem oposta às do arco-íris primário. (Veja o projeto na página 256.)

Já estudamos algumas das aplicações das derivadas; agora, porém, com o auxílio das regras de derivação, estamos em posição de estudar as aplicações da derivação em maior profundidade. Aprenderemos como as derivadas afetam o formato do gráfico de uma função e, em particular, como nos ajudam a localizar os valores máximos e mínimos de funções. Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação. Em particular, poderemos pesquisar a melhor forma de uma lata e explicar a localização de um arco-íris no céu.

4.1 Valores Máximo e Mínimo

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização que resolveremos neste capítulo:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem se ramificar de forma que minimizem a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

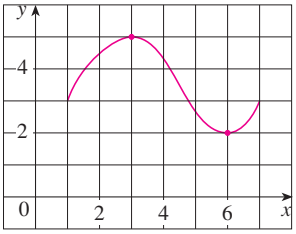


FIGURA 1

Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função f mostrado na Figura 1 é o ponto (3, 5). Em outras palavras, o maior valor de f é $f(3) = 5$. Da mesma forma, o menor valor é $f(6) = 2$. Dizemos que $f(3) = 5$ é o *máximo absoluto* de f e $f(6) = 2$ é o *mínimo absoluto*. Em geral, usamos a seguinte definição.

1 Definição Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo **global**. Os valores máximos e mínimos de f são chamados de **valores extremos** de f.

A Figura 2 mostra um gráfico de uma função f com máximo absoluto em d e mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto no gráfico e $(a, f(a))$ é o menor ponto. Na Figura 2, se considerarmos apenas os valores de x próximos b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c), então $f(b)$ é o maior destes valores de $f(x)$ e é chamado de *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é chamado de *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leqslant f(x)$ para x próximo de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f também tem um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

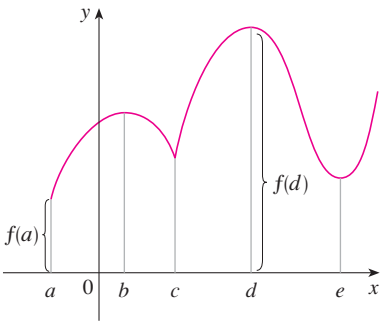


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$,
máximo absoluto $f(d)$,
mínimos locais $f(c)$, $f(e)$,
máximos locais $f(b)$, $f(d)$

2 Definição O número $f(c)$ é um

- valor **máximo local** de f se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x está próximo de c.

Na Definição 2 (e em outras situações), se dissermos que algo é verdadeiro **próximo a** c, queremos dizer que é verdadeiro em algum intervalo aberto contendo c. Por exemplo, na Figura 3 vemos que $f(4) = 5$ é um valor mínimo local, pois é o menor valor de f no intervalo I. Não é o mínimo absoluto porque $f(x)$ tem valores menores quando x está próximo de 12 (no intervalo K, por exemplo). Na verdade, $f(12) = 3$ é tanto o mínimo local quanto o mínimo absoluto. De forma análoga, $f(8) = 7$ é o máximo local, mas não é o máximo absoluto porque f tem valores maiores perto de 1.

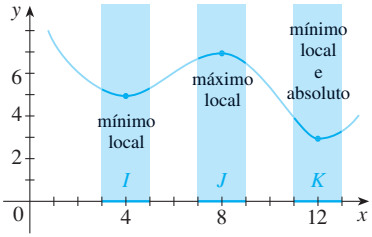


FIGURA 3

EXEMPLO 1 A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) 1 infinitas vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Da mesma forma, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer número inteiro.

EXEMPLO 2 Se $f(x) = x^2$, então, $f(x) \geqslant f(0)$, pois $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Consequentemente, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o menor ponto na parábola $y = x^2$. (Veja a Figura 1.) Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.

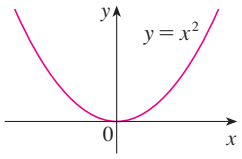


FIGURA 4
Valor mínimo 0, nenhum máximo

EXEMPLO 3 Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na Figura 5, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto, nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela também não tem nenhum valor extremo local.

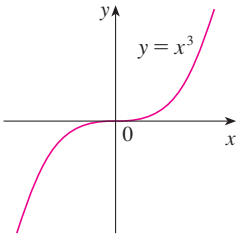


FIGURA 5
Nenhum mínimo, nenhum máximo

EXEMPLO 4 O gráfico da função

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

está mostrado na Figura 6. Você pode ver que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto não é um máximo local, pois ele ocorre em extremo do intervalo.) Além disso, $f(0) = 0$ é um mínimo local e $f(3) = -27$ é um mínimo local tanto quanto absoluto. Observe que f não tem um máximo local nem um máximo absoluto em $x = 4$.

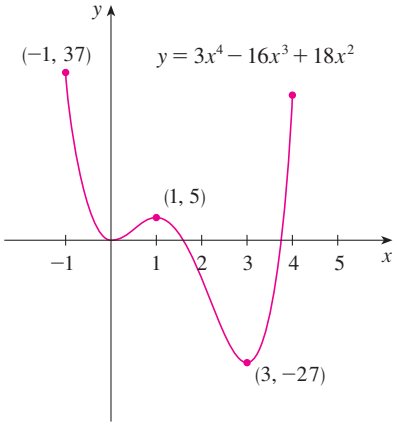


FIGURA 6

Vimos que algumas funções têm valores extremos, enquanto outras não têm. O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

3 O Teorema do Valor Extremo Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 7. Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez. Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser demonstrado e, assim, omitimos sua demonstração.

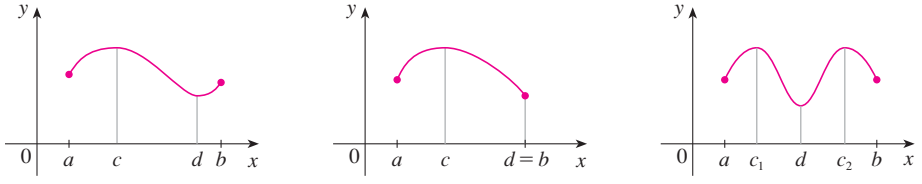


FIGURA 7

As Figuras 8 e 9 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

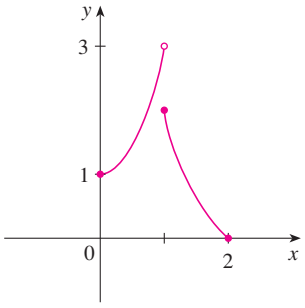


FIGURA 8
Esta função tem valor mínimo $f(2) = 0$, mas nenhum valor máximo.

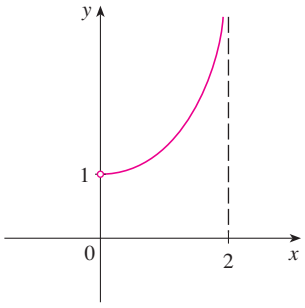


FIGURA 9
Essa função contínua g não tem valor mínimo nem máximo.

A função f, cujo gráfico está mostrado na Figura 8, está definida no intervalo fechado $[0, 2]$, mas não tem valor máximo. [Observe que a imagem de f é $(0, 3)$.] Essa função assume valores arbitrariamente próximos de 3, mas nunca atinge o valor 3.] Isso não necessariamente contradiz o Teorema de Valores Extremos, pois f não é contínua. [Não obstante, uma função descontínua *pode* ter valores máximo e mínimo. Veja o Exercício 13(b).]

A função g da Figura 9 é contínua no intervalo aberto $(0, 2)$, mas não tem nem valor máximo nem mínimo. [A imagem de g é $(1, \infty)$. Essa função assume valores arbitrariamente grandes.] Isso não contradiz o Teorema de Valores Extremos, pois o intervalo $(0, 2)$ não é fechado.

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar procurando os valores extremos locais.

A Figura 10 mostra o gráfico de uma função f com máximo local em c e mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

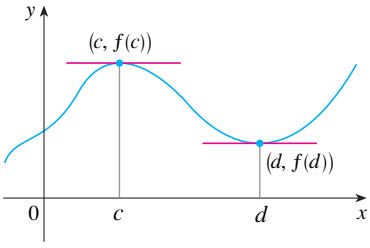


FIGURA 10

Fermat

O Teorema de Fermat é assim designado em homenagem a Pierre Fermat (1601--1665), um advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Apesar de seu amadorismo, Fermat foi, junto com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Seus métodos para encontrar as tangentes às curvas e os valores máximo e mínimo (antes da invenção de limites e derivadas) fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial.

4 Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha, para fixar ideias, que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 2, $f(c) \geqslant f(x)$ se x for suficientemente próximo de c. Isso implica que, se h for suficientemente próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, então

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

e, portanto,

$$\boxed{5} \qquad f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade (usando o Teorema 2.3.2), obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leqslant 0$.

Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade 5 é invertido quando dividimos por h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0.$$

Logo, tomando o limite à esquerda, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0.$$

Mostramos que $f'(c) \geqslant 0$ e também que $f'(c) \leqslant 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

Demonstramos o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser demonstrado de forma análoga, ou pode ser deduzido do caso já demonstrado, por meio do Exercício 76 (veja o Exercício 77).

Os seguintes exemplos nos previnem sobre não esperar demais do Teorema de Fermat: não podemos esperar a locação de valores extremos simplesmente considerando $f'(x) = 0$ e isolando x.

EXEMPLO 5 Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo, $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 11. (Ou observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, mas $x^3 < 0$ para $x < 0$.) O fato é que $f'(0) = 0$ simplesmente significa que a curva $y = x^3$ tem uma tangente horizontal em (0, 0). Em vez de ter máximo ou mínimo em (0, 0), a curva cruza sua tangente horizontal aí.

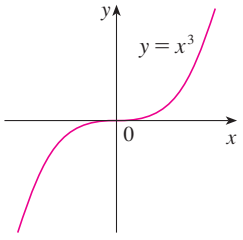


FIGURA 11
Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, mas f não tem mínimo ou máximo.

EXEMPLO 6 A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0, mas o valor não pode ser encontrado por considerar $f'(x) = 0$ porque, como mostrado no Exemplo 5 na Seção 2.8, $f'(0)$ não existe. (Veja a Figura 12.)

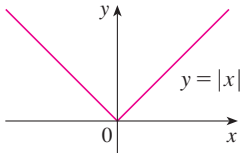


FIGURA 12
Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe.

ATENÇÃO Os Exemplos 5 e 6 mostram que devemos ser muito cuidadosos ao usar o Teorema de Fermat. O Exemplo 5 demonstra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um mínimo ou máximo c. (Em outras palavras, a recíproca do Teorema de Fermat é falsa, em geral.) Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c)$ não existir (como no Exemplo 6).

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 Definição Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

EXEMPLO 7 Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUÇÃO A Regra do Produto fornece

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[O mesmo resultado pode ser obtido, escrevendo-se primeiramente $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, ou seja, $x = \frac{3}{2}$, e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0.

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir (compare a Definição 6 com o Teorema 4):

A Figura 13 mostra um gráfico de uma função f do Exemplo 7. Ele confirma nossa resposta, pois há uma tangente horizontal quando $x = 1{,}5$ e uma tangente vertical quando $x = 0$.

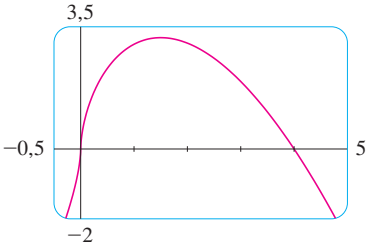


FIGURA 13

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ele é local [nesse caso ocorre em um número crítico, por 7], ou acontece em uma extremidade do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

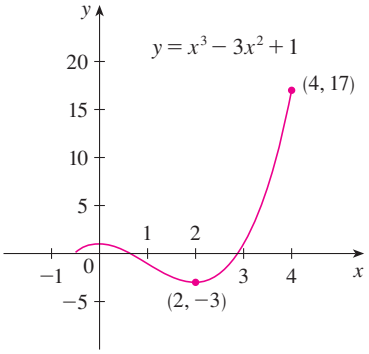


FIGURA 14

EXEMPLO 8 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Os valores de f nestes números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nas extremidades do interval são

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado na Figura 14.

Se você tiver uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico, poderá estimar facilmente os valores máximo e mínimo. Mas, como mostra o próximo exemplo, o cálculo é necessário para encontrar valores *exatos*.

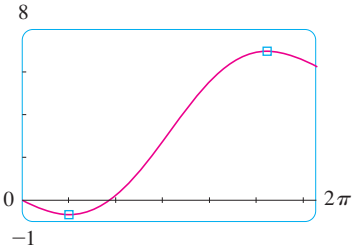


FIGURA 15

EXEMPLO 9
(a) Use uma ferramenta gráfica para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(b) Utilize o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

SOLUÇÃO
(a) A Figura 15 mostra o gráfico de f na janela retangular $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Movendo o cursor próximo ao ponto de máximo, vemos que a coordenada y não varia muito nas vizinhanças do máximo. O valor máximo absoluto é cerca de 6,97 e ocorre quando $x \approx 5{,}2$. Analogamente, movendo o cursor para próximo do ponto de mínimo, vemos que o valor mínimo absoluto é cerca de $-0{,}68$ e ocorre quando $x \approx 1{,}0$. Seria possível obter mais precisão nas estimativas por meio de um *zoom* em direção aos pontos máximo e mínimo, mas, em vez disso, vamos usar o cálculo.

(b) A função $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ é contínua em $[0, 2\pi]$. Uma vez que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, temos $f'(x) = 0$ quando $\cos x = \frac{1}{2}$, e isso ocorre quando $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}684853$$

e

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}968039$$

Os valores de f nas extremidades são

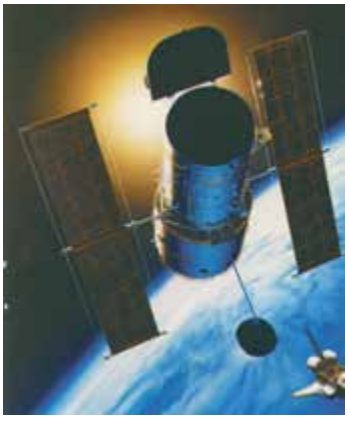
$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6{,}28$$

Comparando esses quatro números e usando o Método do Intervalo Fechado, vemos que o valor mínimo absoluto é $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ e o valor máximo absoluto é $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Os valores da parte (a) servem como uma verificação de nosso trabalho.

EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397$$

(em metros/segundo). Usando este modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.


NASA

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função de velocidade dada, mas da função de aceleração. Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397)$$

$$= 0{,}0011904t^2 - 0{,}05504t + 7{,}196$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0{,}0023808t - 0{,}05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0{,}05504}{0{,}0023808} \approx 23{,}12$$

Calculando $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, temos

$$a(0) = 7{,}196 \qquad a(t_1) \approx 6{,}56 \qquad a(126) \approx 19{,}16$$

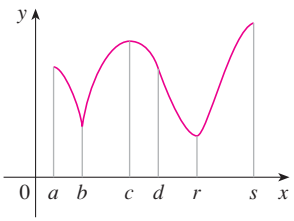
Assim, a aceleração máxima é cerca de 19,16 m/s^2, e a aceleração mínima é cerca de 6,56 m/s^2.

4.1 Exercícios

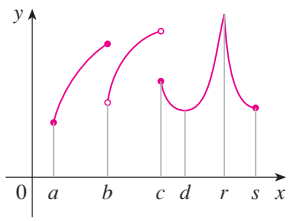
1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.
2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.
   (a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?
   (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

3–4 Para cada um dos números a, b, c, d, r e s, diga se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, máximo ou mínimo local, ou nem máximo nem mínimo.

3.

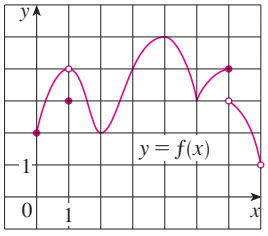


4.

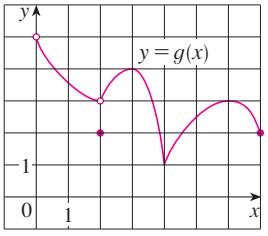


5–6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.



6.



7–10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.
(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leq 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geq -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geq 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leq \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leq 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

29–44 Encontre os números críticos da função.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg}\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2} \ln x$

45–46 É dada uma fórmula para a *derivada* de uma função f. Quantos números críticos f tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0,1|x|} \operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0{,}2; 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \operatorname{cotg}(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\operatorname{tg}^{-1} x, \quad [0, 4]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leq x \leq 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leq x \leq 0$

---

69. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

70. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e onde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg}\theta = \mu$.

71. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre 1993 e 2003 é dado pela função

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

onde t é medido em anos desde agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre a partida e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1.265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

73. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde passa o ar expelido. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0$$

em que k é uma constante e r_0, o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

74. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas g não tem um valor extremo local em 5.

75. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem um local máximo nem um local mínimo.

76. Se f tem um valor mínimo local em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

77. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso em que f tem um mínimo local em c.

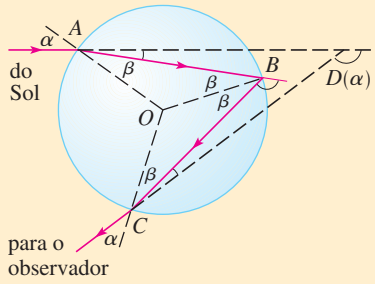
78. Uma função cúbica é um polinômio de grau 3, isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$.

(a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e faça esboços para ilustrar as três possibilidades.

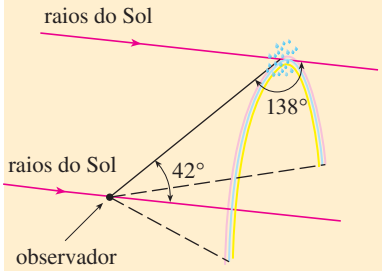
(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

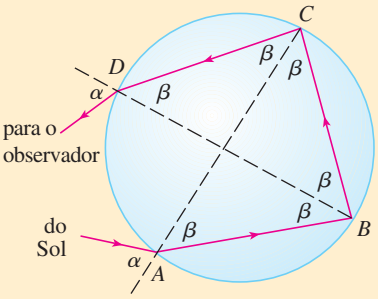
PROJETO APLICADO

O CÁLCULO DO ARCO-ÍRIS

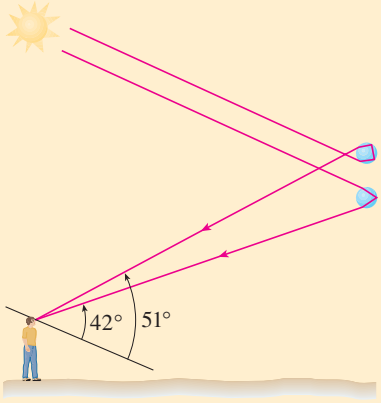


Formação do arco-íris principal





Formação do arco-íris secundário



O arco-íris é o fenômeno que resulta da dispersão da luz do Sol em gotas de chuva suspensas na atmosfera. Ele tem fascinado a humanidade desde os tempos antigos e tem inspirado tentativas de explicação científica desde a época de Aristóteles. Neste projeto, usaremos as ideias de Descartes e de Newton para explicar a forma, a localização e as cores do arco-íris.

1. A figura mostra um raio de luz entrando numa gota d'água esférica por A. Parte da luz é refletida, mas a reta AB mostra a trajetória da parte que entra na gota. Observe que a luz é refratada em direção à reta normal AO e, de fato, a Lei de Snell afirma que $\operatorname{sen}\alpha = k \operatorname{sen}\beta$, em que α é o ângulo de incidência, β é o ângulo de refração e $k \approx \frac{4}{3}$, o índice de refração para a água. Em B, uma parte da luz passa através da gota e é refratada para o ar, mas a reta BC mostra a parte que é refletida. (O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.) Quando o raio alcança C, parte dele é refletido, mas, por ora, estamos mais interessados na parte que deixa a gota d'água em C. (Note que ele é refratado para longe da reta normal.) O *ângulo de desvio* $D(\alpha)$ é a quantidade de rotação no sentido horário sofrida pelo raio que passa por esse processo de três etapas. Logo,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Mostre que o valor mínimo do desvio é $D(\alpha) \approx 138°$ e ocorre quando $\alpha \approx 59{,}4°$.

O significado do desvio mínimo é que, quando $\alpha \approx 59{,}4°$, temos $D'(\alpha) \approx 0$; logo, $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Isso significa que muitos raios com $\alpha \approx 59{,}4°$ são desviados aproximadamente pela mesma quantidade. É essa *concentração* de raios vindos das proximidades da direção de desvio mínimo que cria a luminosidade do arco-íris primário. A figura mostra que o ângulo de elevação a partir do observador até o ponto mais alto sobre o arco-íris é $180° - 138° = 42°$. (Esse ângulo é chamado *ângulo do arco-íris*.)

2. O Problema 1 explica a localização do arco-íris principal, mas como explicar as cores? A luz do Sol é formada por um espectro de comprimentos de onda, partindo do vermelho e passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Como Newton havia descoberto em seus experimentos com prismas em 1666, o índice de refração é diferente para cada cor. (Este efeito é denominado *dispersão*.) Para a luz vermelha, o índice de refração é $k \approx 1{,}3318$, enquanto para a luz violeta, é $k \approx 1{,}3435$. Repetindo os cálculos do Problema 1 para esses valores de k, mostre que o ângulo do arco-íris é cerca de 42,3° para o arco vermelho e 40,6° para o arco violeta. Assim, o arco-íris consiste realmente em sete arcos individuais correspondentes às sete cores.

3. Talvez você já tenha visto um arco-íris secundário mais fraco acima do primeiro. Isso resulta da parte do raio que entra em uma gota de chuva e é refratada em A, refletida duas vezes (em B e C), e refratada quando deixa a gota em D (veja a figura à esquerda). Dessa vez, o ângulo de desvio $D(\alpha)$ é o ângulo total da rotação no sentido anti-horário que o raio sofre nesse processo de quatro etapas. Mostre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

e $D(\alpha)$ tem um valor mínimo quando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Usando $k = \frac{4}{3}$, mostre que o desvio mínimo é cerca de 129°, e assim o ângulo do arco-íris para o arco-íris secundário é cerca de 51°, conforme se vê na figura à esquerda.

4. Mostre que as cores no arco-íris secundário aparecem na ordem inversa daquela do primário.

Pichugin Dmitry/Shutterstock

4.2 O Teorema do Valor Médio

Veremos que muitos dos resultados deste capítulo dependem de um fato central, que é chamado Teorema do Valor Médio. Mas, para chegar ao Teorema do Valor Médio, precisamos primeiro do seguinte resultado.

Rolle

O Teorema de Rolle foi publicado pela primeira vez em 1691 pelo matemático francês Michel Rolle (1652-1719) no livro intitulado *Méthode pour résoudre les Egalitéz*. Ele era um crítico veemente dos métodos de sua época e atacou o cálculo como "uma coleção de falácias engenhosas". Mais tarde, entretanto, ele se convenceu de que os métodos do cálculo estavam essencialmente corretos.

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de darmos a demonstração, vamos olhar os gráficos de algumas funções típicas que satisfaçam as três hipóteses. A Figura 1 mostra os gráficos de quatro dessas funções. Em cada caso, parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$. Assim, o Teorema de Rolle é plausível.

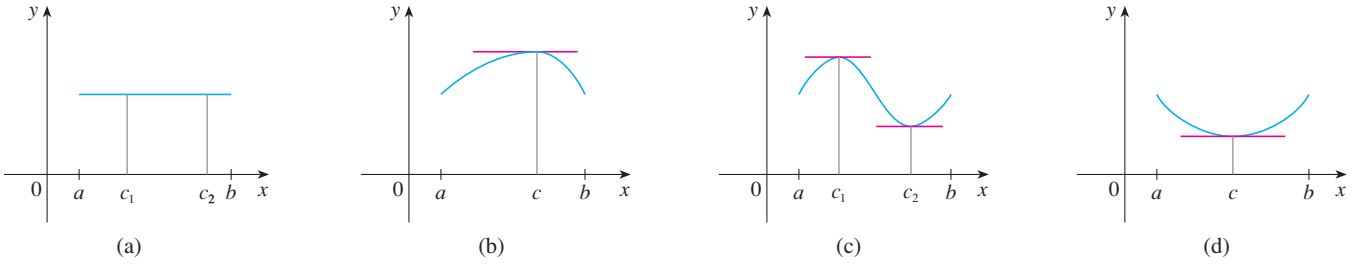


FIGURA 1

DEMONSTRAÇÃO Existem três casos:

CASO I $f(x) = k$, **uma constante**

Então $f'(x) = 0$, assim, o número pode ser tomado como *qualquer* número em (a, b).

CASO II $f(x) > f(a)$ **para algum** x **em** (a, b) [como na Figura 1(b) ou (c)]

Pelo Teorema dos Valores Extremos (que pode ser aplicado pela hipótese 1), f tem um valor máximo em algum lugar de $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, ele deverá ter esse valor máximo em um número c num intervalo aberto (a, b). Então f tem um máximo *local* em c e, pela hipótese 2, f é derivável em c. Portanto $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ **para algum** x **em** (a, b) [como na Figura 1(c) ou (d)]

Pelo Teorema dos Valores Extremos, f tem um valor mínimo em $[a, b]$ e, uma vez que $f(a) = f(b)$, ela assume esse valor mínimo em um número c em (a, b). Novamente $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

SP Considere os casos

EXEMPLO 1 Vamos aplicar o Teorema de Rolle à função posição $s = f(t)$ de um objeto em movimento. Se o objeto estiver no mesmo lugar em dois instantes diferentes $t = a$ e $t = b$, então $f(a) = f(b)$. O Teorema de Rolle afirma que existe algum instante do tempo $t = c$ entre a e b no qual $f'(c) = 0$; isto é, a velocidade é 0. (Em particular, você pode ver que isto é verdadeiro quando uma bola é atirada diretamente para cima.)

EXEMPLO 2 Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

SOLUÇÃO Primeiro, usamos o Teorema do Valor Intermediário (2.5.10) para mostrar que existe uma raiz. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$. Então $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua; assim, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. A equação dada, portanto, tem uma raiz.

Para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o Teorema de Rolle e argumentamos por contradição. Suponha que ele tenha duas raízes a e b. Então $f(a) = 0 = f(b)$

A Figura 2 mostra um gráfico da função $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida no Exemplo 2. O Teorema de Rolle mostra que, independentemente do tamanho da janela retangular, não podemos nunca encontrar uma segunda intersecção com o eixo x.

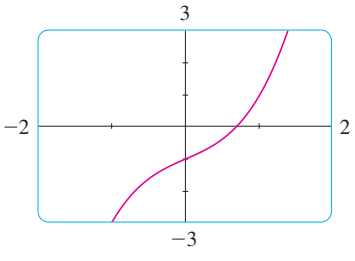


FIGURA 2

e, uma vez que f é uma função polinomial, é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um número c entre a e b tal que $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para todo } x$$

(uma vez que $x^2 \geqslant 0$), portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero. Isso fornece uma contradição. Portanto, a equação não pode ter duas raízes reais.

Nosso principal uso do Teorema de Rolle é na demonstração do seguinte importante teorema, o qual foi primeiro enunciado por outro matemático francês, Joseph-Louis Lagrange.

O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado teorema da existência. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema dos Valores Extremos e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, podemos ver que ele é razoável interpretando-o geometricamente. As Figuras 3 e 4 mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos de duas funções deriváveis. A inclinação da reta secante AB é

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que é a mesma expressão mostrada no lado direito da Equação 1. Uma vez que $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio na forma dada pela Equação 1 diz que há, no mínimo, um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante AB. Em outras palavras, há um ponto P onde a reta tangente é paralela à reta secante AB. (Imagine uma reta paralela a AB, iniciando distante e se movendo paralelamente a ela mesma até tocar o gráfico pela primeira vez.)

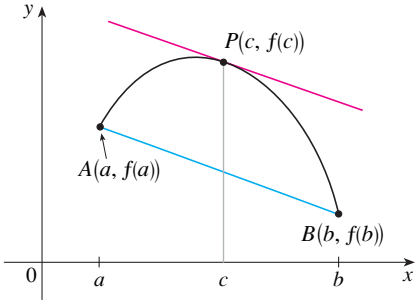


FIGURA 3

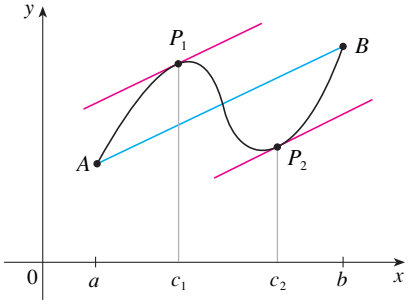


FIGURA 4

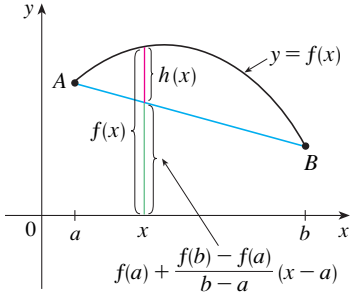


FIGURA 5

DEMONSTRAÇÃO Aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB. Usando a Equação 3, vemos que a equação da reta AB pode ser escrita como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Assim, como mostrado na Figura 5,

4 $$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Precisamos primeiro verificar que h satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle.

1. A função h é contínua em $[a, b]$, pois é soma de f e uma função polinomial de primeiro grau, ambas contínuas.
2. A função h é derivável em (a, b) pois tanto f quanto a função polinomial de primeiro grau são deriváveis. De fato, podemos calcular h' diretamente da Equação 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que $f(a)$ e $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ são constantes.)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Uma vez que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, esse teorema afirma que existe um número c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, assim,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

EXEMPLO 3 Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez que f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Agora $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Mas c deve estar em $(0, 2)$, então, $c = 2/\sqrt{3}$. A Figura 6 ilustra esse cálculo: a reta tangente neste valor de c é paralela à reta secante OB.

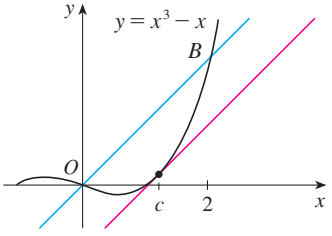


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Se um objeto move-se em uma linha reta com uma função posição $s = f(t)$, então a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$ é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a velocidade em $t = c$ é $f'(c)$. Assim, o Teorema do Valor Médio (na forma da Equação 1) nos diz que, em algum instante $t = c$ entre a e b, a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média. Por exemplo, se um carro percorrer 180 km em duas horas, então o velocímetro deve ter passado pela marca dos 90 km/h pelo menos uma vez.

Em geral, o Teorema do Valor Médio pode ser interpretado como se dissesse que existe um número no qual a taxa de variação instantânea é igual à taxa de variação média em um intervalo.

Lagrange e o Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio foi formulado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nascido na Itália, com pai francês e mãe italiana. Ele foi uma criança prodígio e se tornou professor em Turin na idade de 19 anos. Lagrange fez grandes contribuições à teoria dos números, à teoria das funções, à teoria das equações, e às mecânicas analítica e celeste. Em particular, aplicou o cálculo na análise da estabilidade do sistema solar. A convite de Frederico, o Grande, ele sucedeu Euler na Academia de Berlim e, após a morte de Frederico, Lagrange aceitou o convite do rei Luís XVI para viver em Paris, onde lhe foi dado um apartamento no Louvre. Lá, tornou-se professor da École Polytechnique. A despeito das armadilhas da fama e da luxúria, ele era um homem bondoso e quieto, que vivia somente para a ciência.

A grande importância do Teorema do Valor Médio reside no fato de ele nos possibilitar obter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada. O próximo exemplo mostra esse princípio.

EXEMPLO 5 Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

SOLUÇÃO Foi-nos dado que f é derivável (e, portanto, contínua) em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe, então, um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Foi-nos dado que $f'(x) \leq 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leq 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leq 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

O Teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir. Outros serão encontrados nas seções seguintes.

5 Teorema Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em (a, b), sendo $x_1 < x_2$. Como f é derivável em (a, b), ela deve ser derivável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{6}$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ para todo x, temos $f'(c) = 0$, e a Equação 6 fica

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_2) = f(x_1)$$

Portanto, f tem o mesmo valor em *quaisquer* dois números x_1 e x_2 em (a, b). Isso significa que f é constante em (a, b).

7 Corolário Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo x em (a, b). Assim, pelo Teorema 5, F é constante; isto é, $f - g$ é constante.

OBSERVAÇÃO É necessário cuidado ao aplicar o Teorema 5. Seja

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D = \{x \mid x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo x em D. Mas f não é, obviamente, uma função constante. Isso não contradiz o Teorema 5, pois D não é um intervalo. Observe que f é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.

EXEMPLO 6 Demonstre a identidade $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Embora não seja necessário o cálculo para demonstrar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

para todos os valores de x. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de C, fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ exatamente). Então

$$C = f(1) = \text{tg}^{-1}1 + \text{cotg}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

4.2 Exercícios

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

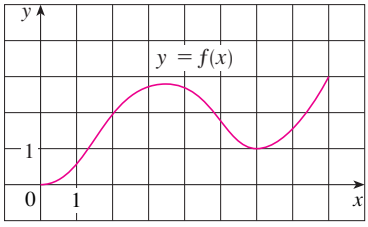
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = \text{tg}\, x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9–12 Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

10. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

11. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

13–14 Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo dado. Desenhe o gráfico da função, a reta secante passando pelas extremidades, e a reta tangente em $(c, f(c))$. A reta secante e a reta tangente são paralelas?

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$ **14.** $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

15. Seja $f(x) = (x-3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17–18 Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

17. $2x + \cos x = 0$ **18.** $x^3 + e^x = 0$

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem, no máximo, três raízes reais.
(b) Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
(b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno $f(4)$ pode ser?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1, f(2) = 4$ e $f'(x) \leq 2$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$. [*Dica*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e é derivável em toda parte. Demonstre que para todo o número positivo b, existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b.$$

30. Se $f'(x) = c$ (c é uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Sejam $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2\operatorname{sen}^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2), \qquad x \geqslant 0.$$

33. Demonstre a identidade.

$$\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Ás 14 h da tarde o velocímetro do carro mostra 50 km/h. Às 14 h 10, ele mostra 65 km/h. Prove que em algum momento entre 14 h e 14 h 10 a aceleração era exatamente de 90 km/h^2.

35. Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade. [*Dica:* Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde g e h são as duas posições dos corredores.]

36. Um número a é chamado **ponto fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todos os números reais x, então f tem no máximo um ponto fixo.

4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

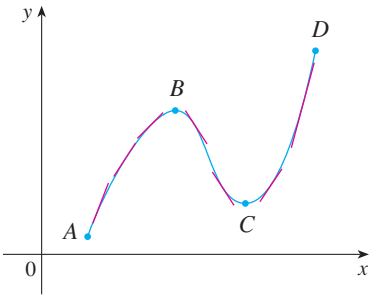


FIGURA 1

Vamos abreviar o nome deste teste para Teste C/D.

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos forneçam informações sobre $f(x)$.

O que f' diz sobre f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) > 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da Equação 1 é positivo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Isso mostra que f está aumentando.

A parte (b) é demonstrada de maneira semelhante.

EXEMPLO 1 Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

SOLUÇÃO $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para usarmos o Teste C/D, devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, isto é, $12x$, $x - 2$ e $x + 1$. Dividimos a reta real em intervalos cujas extremidades são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos o que fizemos em uma tabela. Um sinal de mais indica que a expressão dada é positiva, e um sinal de menos indica que é negativa. A última coluna da tabela mostra a conclusão baseada no teste C/D. Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que f é decrescente em $(0, 2)$. (Também seria verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado $[0, 2]$.)

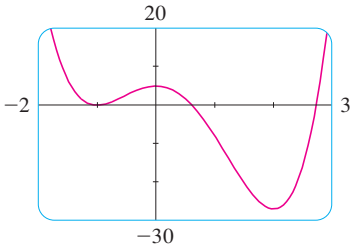


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	crescente em $(2, \infty)$

O gráfico de f mostrado na Figura 2 confirma a informação dada na tabela.

Da Seção 4.1, lembre-se de que se f tem um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f (pelo Teorema de Fermat), mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Consequentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.

Você pode ver a partir da Figura 2 que $f(0) = 5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1, 0)$ e decresce em $(0, 2)$. Ou, em termos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

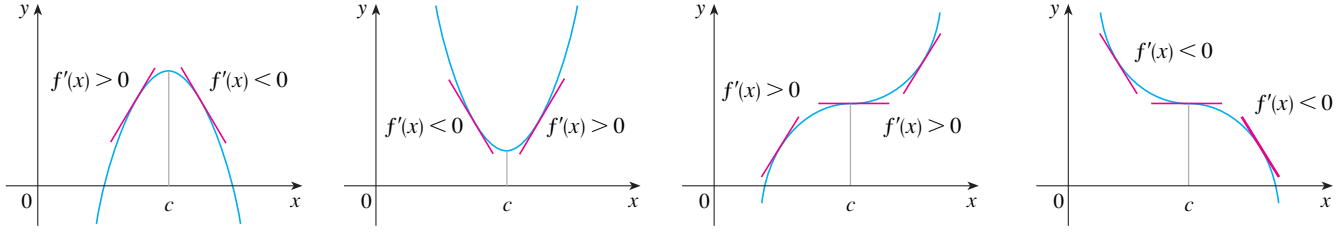
(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

O Teste da Primeira Derivada é uma consequência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita de c. A consequência é que f tem um máximo local em c.

É fácil memorizar o Teste da Primeira Derivada visualizando diagramas como os da Figura 3.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

FIGURA 3

EXEMPLO 2 Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função f do Exemplo 1.

SOLUÇÃO Da tabela na solução do Exemplo 1, vemos que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1, então $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada. Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2; portanto, $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como observado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

EXEMPLO 3 Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Para achar os números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Os sinais + na tabela vêm do fato de que $g'(x) > 0$ quando $\cos x > -\frac{1}{2}$. Do gráfico de $y = \cos x$, isso é verdade nos intervalos indicados.

Logo, $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$. As soluções desta equação são $2\pi/3$ e $4\pi/3$.

Como g é derivável em toda parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$ e, portanto, analisamos g na tabela a seguir.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2 \cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$ muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, então

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local. O gráfico g na Figura 4 confirma nossa conclusão.

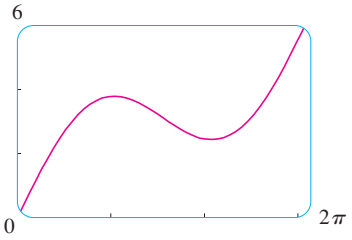


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

O que f'' nos diz sobre f?

A Figura 5 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois se inclinam em direções diferentes. Como distinguir entre esses dois tipos de comportamento? Na Figura 6, as tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a), a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b), a curva está abaixo das tangentes g e é chamada *côncava para baixo* em (a, b).

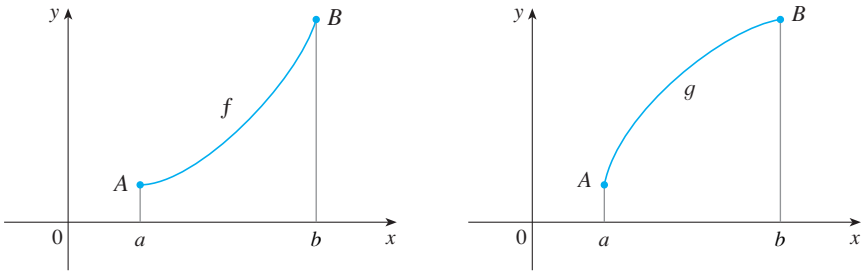


FIGURA 5

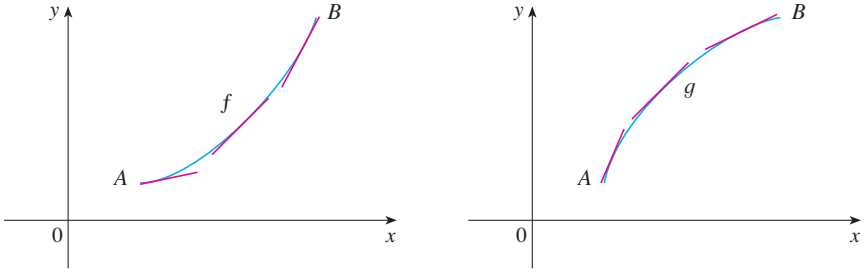


FIGURA 6

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada **côncava para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada **côncava para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

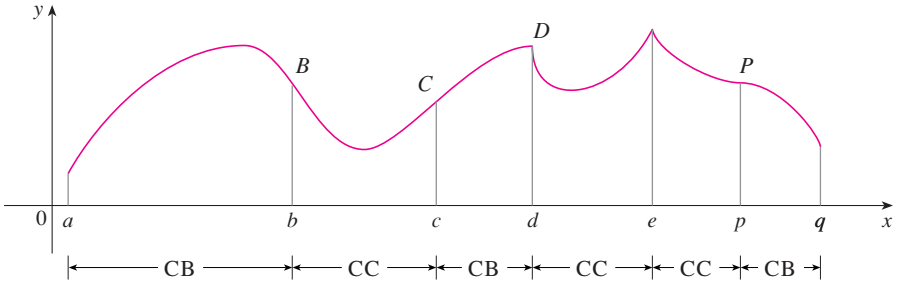


FIGURA 7

Vamos observar como a segunda derivada nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), você pode ver que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce. Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e, consequentemente, sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo, f' decresce e, portanto, f'' é negativa. Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro. Uma demonstração dele está dada no Apêndice F, a qual usa o Teorema do Valor Médio.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

EXEMPLO 4 A Figura 8 mostra um gráfico da população de abelhas cipriotas criadas em um apiário. Como cresce a taxa populacional? Quando essa taxa é mais alta? Sobre quais intervalos P é côncavo para cima ou côncavo para baixo?

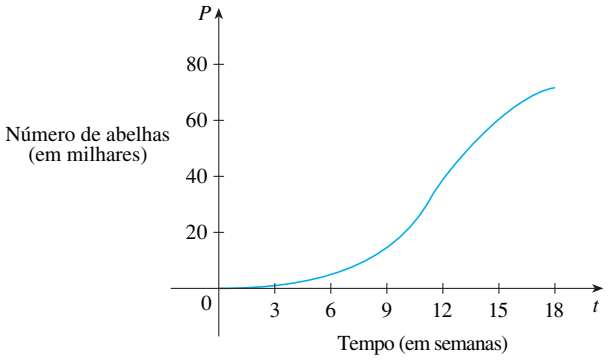


FIGURA 8

SOLUÇÃO Examinando a inclinação da curva quando t cresce, vemos que a taxa de crescimento populacional é inicialmente muito pequena, então se torna maior até atingir o máximo em cerca de $t = 12$ semanas, e decresce até a população se estabilizar. À medida que a população tende a seu valor máximo de cerca de 75.000 (chamada *capacidade de suporte*), a taxa de crescimento, $P'(t)$, tende a 0. A curva parece ser côncava para cima em (0, 12) e côncava para baixo em (12, 18).

No Exemplo 4, a curva populacional varia de côncava para cima a côncava para baixo aproximadamente no ponto (12, 38.000) Este ponto é chamado de *ponto de inflexão* da curva. O significado desse ponto é que a taxa de crescimento populacional tem ali seu valor máximo. Em geral, um ponto de inflexão é aquele em que uma curva muda a direção de sua concavidade.

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Por exemplo, na Figura 7, B, C, D e P são os pontos de inflexão. Observe que se uma curva tiver uma tangente em um ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente aí.

Em vista do Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a segunda derivada mudar de sinal.

EXEMPLO 5 Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

(i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

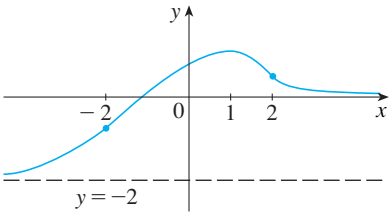


FIGURA 9

SOLUÇÃO A condição (i) nos diz que f cresce em $(-\infty, 1)$ e decresce em $(1, \infty)$. A condição (ii) diz que f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, e côncava para baixo em $(-2, 2)$. Da condição (iii) sabemos que o gráfico de f tem duas assíntotas horizontais: $y = -2$ e $y = 0$.

Primeiro, traçamos a assíntota horizontal $y = -2$ como uma linha tracejada (veja a Figura 9). Então fazemos o gráfico de f tendendo a essa assíntota no extremo esquerdo, crescente até seu máximo no ponto $x = 1$ e decrescente em direção ao eixo x na extremidade direita. Nós também nos asseguramos de que o gráfico tem pontos de inflexão quando $x = -2$ e 2. Observe que fizemos a curva encurvada para cima para $x < -2$ e $x > 2$, e para baixo quando x está entre -2 e 2.

Outra aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para os valores máximo e mínimo. Ele é uma consequência do Teste da Concavidade.

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Por exemplo, a parte (a) é verdadeira, pois $f''(x) > 0$ próximo a c e portanto f é côncava para cima próximo de c. Isso significa que o gráfico de f se situa *acima* de sua tangente horizontal em c, de modo que f tem um mínimo local em c. (Veja a Figura 10.)

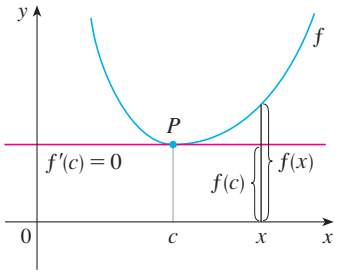


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f é côncavo para cima.

EXEMPLO 6 Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrarmos os números críticos, fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0. Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. [De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	+	para cima
$(0, 2)$	−	para baixo
$(2, \infty)$	+	para cima

O ponto (0, 0) é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também (2, −16) é um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura 11.

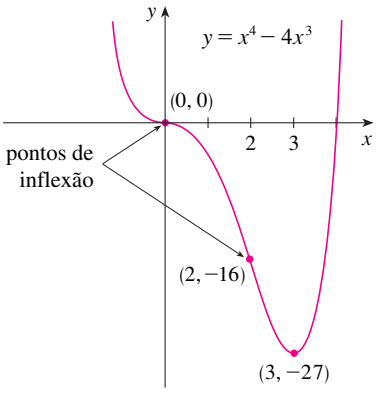


FIGURA 11

OBSERVAÇÃO O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois (como no Exemplo 6). Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Primeira da Derivada é frequentemente mais fácil de aplicar.

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUÇÃO O cálculo das duas primeiras derivadas dá

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decrescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	crescente em $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decrescente em $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decrescente em $(6, \infty)$

Tente reproduzir o gráfico na Figura 12 com uma calculadora gráfica ou computador. Algumas máquinas fornecem o gráfico completo; outras, apenas a parte à direita do eixo y, enquanto outras produzem somente a parte entre $x = 0$ e $x = 6$. Para mais explicações, veja o Exemplo 7 da Seção 1.4. Uma expressão equivalente que fornece o gráfico correto é

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

Use as regras de diferenciação para validar estes cálculos.

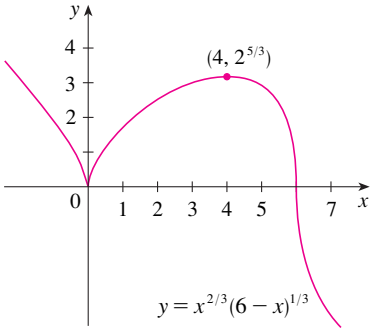


FIGURA 12

Para encontrarmos os valores extremos locais, usamos o Teste da Primeira Derivada. Uma vez que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local. Já que o sinal de f' muda de positivo para negativo em 4, $f(4) = 2^{5/3}$ é um máximo local. O sinal de f' não muda em 6; logo, não há nem mínimo, nem máximo aí. (O Teste de Segunda Derivada poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6, uma vez que f'' não existe aí.)

Examinando a expressão para $f''(x)$ e observando que $x^{4/3} \geqslant 0$ para todo x, temos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 6$ e $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Logo, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$ e côncava para cima em $(6, \infty)$, e o único ponto de inflexão é $(6, 0)$. O gráfico está esboçado na Figura 12. Observe que a curva tem tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(6, 0)$, pois $|f'(x)| \to \infty$ quando $x \to 0$ e quando $x \to 6$.

EXEMPLO 8 Use a primeira e a segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

SOLUÇÃO Observe que o domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$; portanto, verificamos a existência de assíntotas verticais calculando os limites à esquerda e à direita quando $x \to 0$. Quando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

e isso mostra que $x = 0$ é uma assíntota vertical. Quando $x \to 0^-$, temos $t = 1/x \to -\infty$, de modo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

TEC Em *Module 4.3* você pode praticar utilizando a informação sobre f', f'' e assíntotas para determinar a forma do gráfico de f.

Quando $x \to \pm\infty$, temos $1/x \to 0$; logo,

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Isso mostra que $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Agora, vamos calcular a derivada. A Regra da Cadeia dá

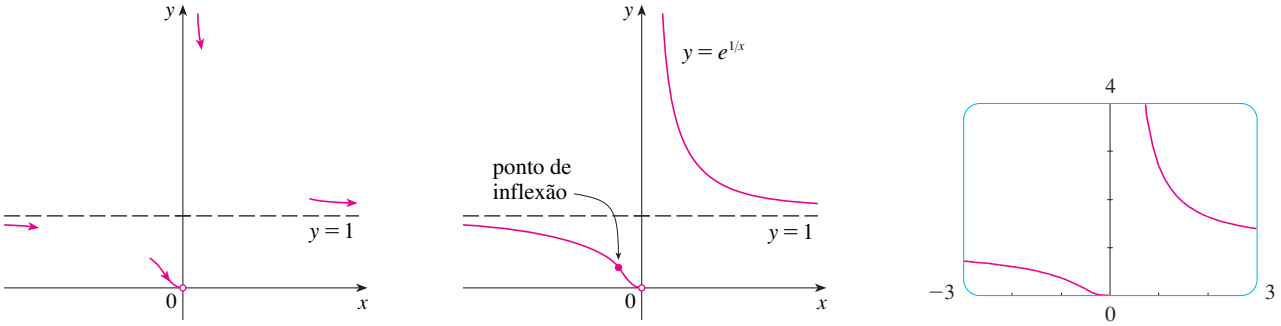
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, temos $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Assim, f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$. Não há número crítico; logo, a função não tem valores máximo e mínimo locais. A segunda derivada é

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{2}$. Portanto, a curva é côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e côncava para cima em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e em $(0, \infty)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para esboçarmos o gráfico de f, primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (como uma linha tracejada), junto com as partes da curva próxima da assíntota em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação relativa aos limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ como em $(0, \infty)$. Observe que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$ mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação relativa à concavidade e ao ponto de inflexão. Na Figura 13(c) verificamos nosso trabalho com uma ferramenta gráfica.



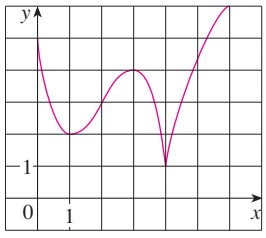
(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação computacional

FIGURA 13

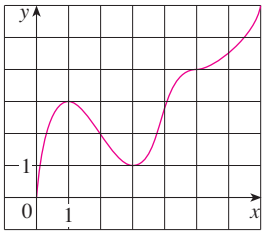
4.3 Exercícios

1–2 Usar o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:
(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.
(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.

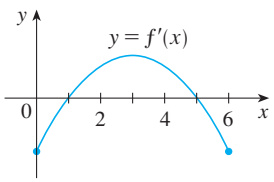


3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

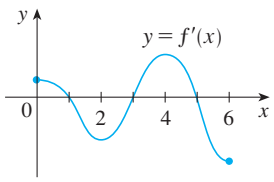
4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5-6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?

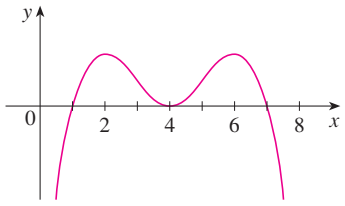
5.



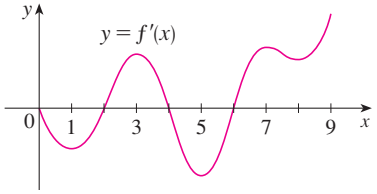
6.



7. Em cada item, indique as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Dê razões para suas escolhas.
(a) Esta curva é o gráfico de f.
(b) Esta curva é o gráfico de f'.
(c) Esta curva é o gráfico de f''.



8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo locais de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando os Testes da Primeira e da Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$ **20.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

---

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que podemos dizer sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f'''(6) = 0$, o que podemos dizer sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

24. Assíntota vertical $x = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < -2$,
$f'(x) < 0$ se $x > -2$ $(x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$, ponto de inflexão $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $x \neq 2$

28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

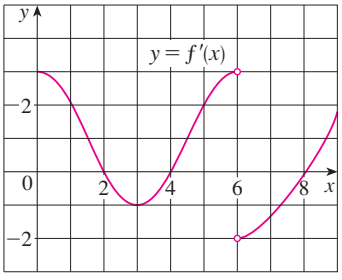
29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x

---

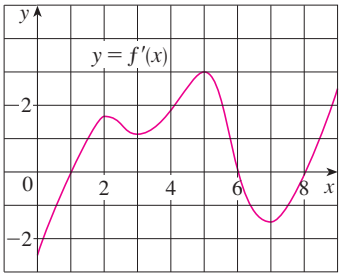
30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
(a) Esboce um gráfico possível de f.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? E decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo local? E no mínimo local?
(c) Em que intervalos f é côncava para cima? E côncava para baixo?
(d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44
(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ **36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$ **38.** $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

39. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$ **40.** $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$ **42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

44. $S(x) = x - \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 4\pi$

45–52
(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais.
(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ **48.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$ **50.** $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **52.** $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

---

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56
(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

55. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **56.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

57–58

(a) Use um gráfico de f para estimar aproximadamente os intervalos de concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.
(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

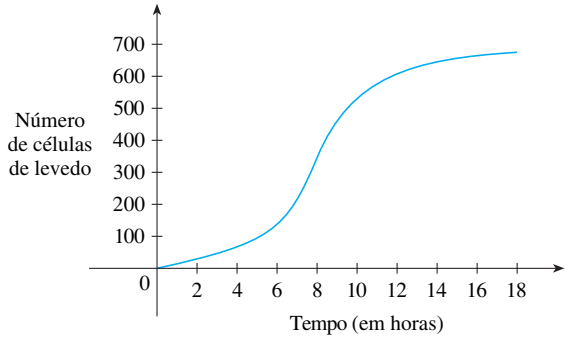
57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x-2)^4$

SCA **59–60** Estime os intervalos de concavidade com precisão de uma casa decimal usando um sistema de computação algébrica para calcular e fazer o gráfico de f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}^{-1} x}{1 + x^3}$

61. É dado o seguinte gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório em função do tempo.
(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.
(b) Quanto a taxa é mais alta?
(c) Em quais intervalos a função população é côncava para cima ou para baixo?
(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.



62. Seja $f(t)$ a temperatura no instante t onde você mora e suponha que no instante $t = 3$ você se sinta desconfortavelmente quente. Como você se sente em relação às informações dadas em cada caso?
(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
(b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
(d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Seja $K(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. Qual será maior: $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

64. A caneca mostrada na figura está sendo enchida com café a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual o significado do ponto de inflexão?

65. Uma *curva dose-resposta* descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. Uma função onda $S(t) = At^p e^{-kt}$ é usada frequentemente para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga específica, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ e t for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e explique seu significado. Se você tiver uma ferramenta gráfica, use-a para traçar a curva de resposta à droga.

66. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante μ é denominada *média*, e a constante positiva σ é conhecida como *desvio padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.
(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?
(c) Ilustre, fazendo o gráfico de quatro membros dessa família sobre a mesma tela.

67. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em $x = -2$ e um valor mínimo local 0 em $x = 1$.

68. Para quais valores dos números a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo de $f(2) = 1$?

69. (a) Se a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tem o valor mínimo local de $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ em $x = 1/\sqrt{3}$, quais são os valores de a e b?
(b) Qual das tangentes à curva na parte (a) tem a menor inclinação?

70. Para que valores de a e b é $(2; 2{,}5)$ um ponto de inflexão da curva $x^2y + ax + by = 0$? Quais pontos de inflexão adicionais a curva tem?

71. Mostre que a curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tem três pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

72. Mostre que as curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocam a curva $y = e^{-x}\operatorname{sen} x$ em seu ponto de inflexão.

73. Mostre que os pontos de inflexão da curva $y = x \operatorname{sen} x$ estão sobre a curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

74–76 Suponha que todas as funções sejam duas vezes deriváveis e que as segundas derivadas nunca sejam nulas.

74. (a) Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncavo para cima em I.

(b) Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

75. (a) Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que a função produto fg é côncava para cima em I.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que f e g sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que f seja crescente e g, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que fg pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

76. Suponha que f e g sejam ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições em f a função composta $h(x) = f(g(x))$ será côncava para cima?

77. Mostre que $\operatorname{tg} x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Dica:* Mostre que $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

78. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para demonstrar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

79. Mostre que uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) sempre tem exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico tem três intersecções com o eixo x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

80. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum? Ilustre traçando o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico muda quando c decresce?

81. Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existir em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Dica*: Aplique o Teste da Primeira Derivada e o Teorema de Fermat à função $g = f'$.]

82. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

83. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

84. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c?

85. Suponha que f seja derivável em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todos os números x em I, exceto para um único número c. Prove que f é crescente em todo o intervalo I.

86. Para quais valores de c a função

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

é crescente $(-\infty, \infty)$?

87. Os três casos no Teste da Primeira Derivada cobrem as situações encontradas usualmente, mas não esgotam todas as possibilidades. Considere as função f, g e h cujos valores em 0 são todos 0 e, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

(a) Mostre que 0 é um número crítico de todas as três funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes em ambos os lados de 0.

(b) Mostre que f não tem um máximo nem um mínimo local em 0, que g tem um mínimo local e que h tem um máximo local.

4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Apesar de F não estar definida em $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* a 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em $\boxed{1}$ exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo** $\frac{0}{0}$. Encontramos alguns limites desse tipo no Capítulo 2. Por funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Mas esses métodos não funcionam para limites tais como $\boxed{1}$, de modo que nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como *a Regra de l'Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de F e precisamos calcular o limite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$. Há uma disputa entre o numerador e o denominador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta será algum número positivo finito.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo** ∞/∞. Vimos na Seção 2.6 que esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções – incluindo aquelas racionais – dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Esse método não funciona para um limite como $\boxed{2}$, mas a Regra de l'Hôspital aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

Regra de l'Hôspital Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

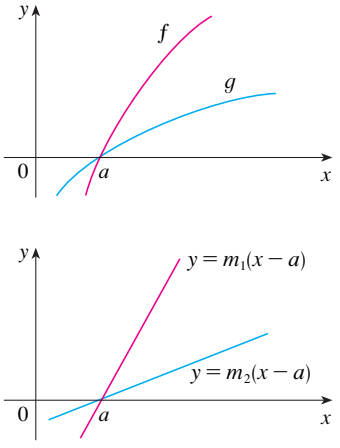


FIGURA 1

A Figura 1 sugere visualmente por que a Regra de l'Hôspital pode ser verdadeira. O primeiro gráfico mostra duas funções deriváveis f e g, que tendem a 0 quando $x \to a$. Se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, 0)$, o gráfico começaria a parecer quase linear. Mas se as funções forem realmente lineares, como no segundo gráfico, então sua razão será

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que é a razão de suas derivadas. Isso sugere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

l'Hôspital

A Regra de l'Hôspital é assim chamada em homenagem ao nobre francês Marquês de l'Hôspital (1661-1704), mas foi descoberta pelo matemático suíço John Bernoulli (1667-1748). Você pode encontrar algumas vezes l'Hôspital escrito como l'Hôpital, mas ele soletrava seu próprio nome como l'Hôspital, como era comum no século XVII. Veja o Exercício 81, que mostra o exemplo o qual o marquês usou para ilustrar sua regra.

OBSERVAÇÃO 1 A Regra de l'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de l'Hôspital.

OBSERVAÇÃO 2 A Regra de l'Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, "$x \to a$" pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

OBSERVAÇÃO 3 Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas, e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de l'Hôspital é verdadeira. De fato, usando a forma alternativa da definição de derivada, temos

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

É mais difícil demonstrar a versão geral da Regra de l'Hôspital. Veja o Apêndice F.

EXEMPLO 1 Encontre $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

podemos aplicar a Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1.$$

Lembre-se de que quando usamos a regra de l'Hôspital, derivamos o numerador e o denominador *separadamente*. Nós não usamos a Regra do Quociente.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Temos $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado, mas uma segunda aplicação da Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

O gráfico da função do Exemplo 2 está na Figura 2. Observamos anteriormente que a função exponencial cresce muito mais rapidamente do que a função potência; assim, o resultado do Exemplo 2 é esperado. Veja também o Exercício 71.

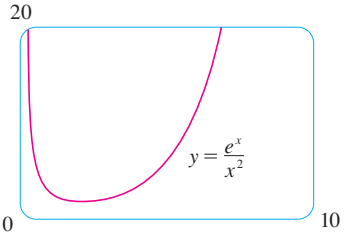


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\ln x \to \infty$ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, a Regra de l'Hôspital pode ser aplicada:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Observe que o limite no lado direito agora é do tipo indeterminado $\frac{0}{0}$. Mas em vez de aplicarmos a Regra de l'Hôspital uma segunda vez, como fizemos no Exemplo 2, simplificamos a expressão e vemos que é desnecessária uma segunda aplicação da regra:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

O gráfico da função do Exemplo 3 está na Figura 3. Já havíamos discutido anteriormente o lento crescimento dos logaritmos, então não é surpresa que essa razão tenda a zero quando $x \to \infty$. Veja também o Exercício 72.

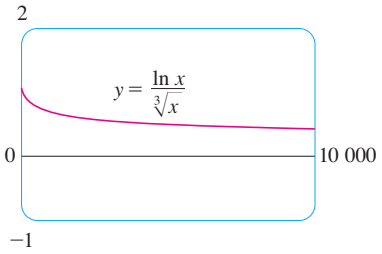


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (Veja o Exercício 44 na Seção 2.2.)

SOLUÇÃO Observando que $\operatorname{tg} x - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$, usamos então a Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Uma vez que o limite do lado direito é ainda indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos novamente a Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

Pelo fato de $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos os cálculos anteriores da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

Podemos calcular este último limite ou usando a Regra de l'Hôspital mais uma vez ou escrevendo $\operatorname{tg} x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ e usando nosso conhecimento de limites trigonométricos. Juntando todos estes passos, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUÇÃO Se tentarmos usar cegamente a Regra de l'Hôspital, obteremos

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

Isso está **errado!** Embora o numerador $\operatorname{sen} x \to 0$ quando $x \to \pi^-$, perceba que o denominador $(1 - \cos x)$ não tende a zero; logo, não podemos aplicar aqui a Regra de l'Hôspital.

O limite pedido é na verdade fácil de ser encontrado, pois a função é contínua em π e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

O Exemplo 5 mostra o que pode acontecer de errado ao usar impensadamente a Regra de l'Hôspital. Outros limites *podem* ser encontrados pela Regra de l'Hôspital, mas são mais fa-

O gráfico na Figura 4 dá confirmação visual do resultado do Exemplo 4. Se déssemos um *zoom*, porém, obteríamos um gráfico impreciso, pois $\operatorname{tg} x$ está próximo de x para x pequeno. Veja o Exercício 44 (d) na Seção 2.2.

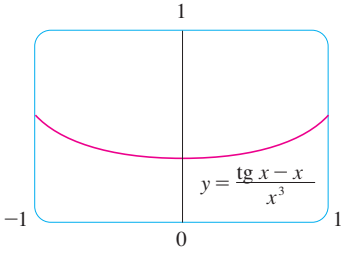


FIGURA 4

cilmente calculados por outros métodos. (Veja os Exemplos 3 e 5 na Seção 2.3, o Exemplo 3 na Seção 2.6, e a discussão no começo desta seção.) Assim, quando calcular qualquer limite, você deve considerar outros métodos antes de usar a Regra de l'Hôspital.

Produtos Indeterminados

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro que valor de $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f ganhar a resposta é 0; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado **forma indeterminada do tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**. Podemos lidar com ela escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞, de modo que podemos usar a Regra de l'Hôspital.

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

SOLUÇÃO O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator ($\ln x$) tende a $-\infty$. Escrevendo $x = 1/(1/x)$ temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$; logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

A Figura 5 mostra o gráfico da função do Exemplo 6. Observe que a função não está definida em $x = 0$; o gráfico tende à origem, mas nunca realmente a atinge.

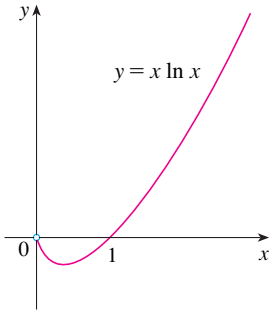


FIGURA 5

OBSERVAÇÃO Ao resolver o Exemplo 6, outra opção possível seria escrever

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo 0/0, mas, se aplicarmos a Regra de l'Hôspital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos. Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

Diferenças Indeterminadas

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

é chamado **forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$**. De novo, há uma disputa entre f e g. A resposta será ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito? Para descobrirmos, tentamos converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que $\sec x \to \infty$ e $\operatorname{tg} x \to \infty$ quando $x \to (\pi/2)^-$; logo, o limite é indeterminado. Aqui usamos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que o uso da Regra de l'Hôspital é justificado, pois $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ e $\cos x \to 0$ quando $x \to (\pi/2)^-$.

Potências Indeterminadas

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, tipo 0^0,
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, tipo ∞^0,
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, tipo 1^∞.

Apesar de as formas do tipo 0^0, ∞^0, e 1^∞ serem indeterminadas, a forma 0^∞ não é indeterminada. (Veja o Exercício 84.)

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

$$\text{seja} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{então} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Relembre que ambos os métodos foram utilizados na derivação dessas funções.) Em qualquer método, somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ e $\operatorname{cotg} x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Considere

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$$

Então

$$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}] = \operatorname{cotg} x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos proceder como no Exemplo 8 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

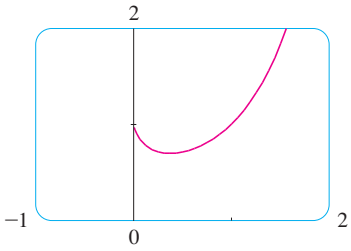


FIGURA 6

No Exemplo 6 usamos a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Logo

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

4.4 Exercícios

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \quad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

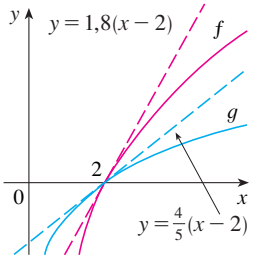
(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

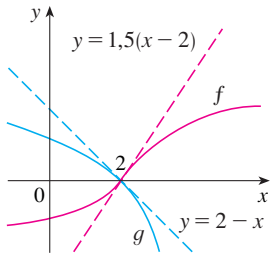
(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Use os gráficos de f e g e suas retas tangentes em $(2, 0)$ para encontrar $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7–66 Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos 2\theta}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{cossec}\theta}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

21. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x 3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

36. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

41. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2}$

43. $\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

46. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1^1} \ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$

48. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

49. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

50. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

51. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

52. $\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x} \right)$

53. $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

54. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

55. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$

57. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

59. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

62. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

63. $\lim_{x\to 0^+} (4x+1)^{\cotg x}$

64. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tg(\pi x/2)}$

65. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

66. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

67–68 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de l'Hôpital para encontrar o valor exato.

67. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

68. $\lim_{x\to 0} \frac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$

69–70 Ilustre a Regra de l'Hôspital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x=0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x\to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

69. $f(x)=e^x-1, \quad g(x)=x^3+4x$

70. $f(x)=2x \operatorname{sen} x, \quad g(x)=\sec x-1$

71. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}=\infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

72 Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p}=0$$

para todo número $p>0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

73–74 O que acontece se você tentar usar a Regra de l'Hôspital para encontrar o limite? Calcule o limite usando outro método.

73. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

74. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tg x}$

75. Investigue a família de curvas dada por $f(x)=e^x-cx$. Em particular, encontre os limites quando $x\to\pm\infty$ e determine os valores de c para os quais f tem um mínimo absoluto. O que acontece aos pontos mínimos quando c cresce?

76. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v=\frac{mg}{c}(1-e^{-ct/m})$$

Onde g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto; c é a constante proporcionalidade.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de l'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

77. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n\to\infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a regra de l'Hôspital para mostrar que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A=A_0e^{rt}$$

78. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t)=\frac{m}{c}\ln\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

onde c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

79. Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E)=\frac{e^E+e^{-E}}{e^E-e^{-E}}-\frac{1}{E}$$

Mostre que $\lim_{E\to 0^+} P(E)=0$.

80. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade de um impulso elétrico do cabo é

$$v=-c\left(\frac{r}{R}\right)^2\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

onde c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

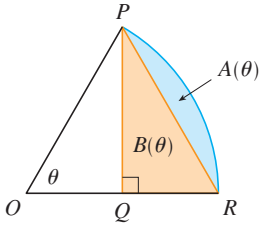
(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

81. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi em um livro *Analyse des infiniment petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro *livro* de cálculo publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y=\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a>0$. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2.) Resolva esse problema.

82. A figura mostra um setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



83. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]$.

84. Suponha que f seja uma função positiva. Se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, mostre que

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=0$$

Isso mostra que 0^∞ não é uma forma indeterminada.

85. Se f' for contínua, $f(2)=0$ e $f'(2)=7$, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$$

86. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)=0$$

87. Se f' for contínua, use a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

88. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

89. Considere

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens que são definidas em $\mathbb{R}$. [*Dica:* Primeiro mostre por indução que há um polinômio $p_n(x)$ e um número inteiro não negativo k_n tais que $f^{(n)}(x)=p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x\neq 0$.]

90. Considere

$$f(x)=\begin{cases}|x|^x & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é derivável em 0 por meio de sucessivos *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é derivável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?

PROJETO ESCRITO AS ORIGENS DA REGRA DE L'HÔSPITAL

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES
SECONDE EDITION
A PARIS,
MDCCXVI

Thomas Fisher Rare Book Library

www.stewartcalculus.com
A internet é outra fonte de informação para este projeto. Clique em *History of Mathematics,* em www.stewartcalculus.com, para uma lista de websites confiáveis.

A Regra de l'Hôspital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des infiniment petits*, do marquês de l'Hôspital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John (Johann) Bernoulli. A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de l'Hôspital os direitos das descobertas de Bernoulli. Os detalhes desse acordo, inclusive a tradução da carta de l'Hôspital para Bernoulli propondo o arranjo, podem ser encontrados no livro de Eves [1].

Escreva um relatório sobre as origens histórica e matemática da Regra de l'Hôspital. Comece fornecendo uma breve biografia de ambos (o dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte), e resuma o arranjo feito por eles. A seguir, dê o enunciado da Regra de l'Hôspital, que é encontrada no livro de Struik [4] e mais resumidamente no livro de Katz [3]. Observe que l'Hôspital e Bernoulli formularam geometricamente a regra e deram a resposta em termos de diferenciais. Compare seus enunciados com a versão da regra de Bernoulli dada na Seção 4.4 e mostre que os dois enunciados são essencialmente iguais.

1. Eves, H. *em Mathematical Circles Volume 2:* Quadrantes III e IV Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969. pp. 20–22.
2. Gillispie, C. C. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Johann Bernoulli by E. A. Fellmann e J. O. Fleckenstein em Volume II e o artigo em Marquês de l'Hôspital por Abraham Robinson no Volume VIII.
3. Katz, V. *A History of Mathematics:* An Introduction. Nova York: HarperCollins, 1993. p. 484.
4. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics,* 1200–1800. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969. p. 315–316.

4.5 Resumo do Esboço de Curvas

Até o momento, estivemos preocupados com alguns aspectos particulares de esboço de curvas: domínio, imagem e simetria no Capítulo 1; limites, continuidade e assíntotas no Capítulo 2; derivadas e tangentes nos Capítulos 2 e 3; e valores extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e Regra de L'Hôspital neste capítulo. Chegou a hora de agruparmos todas essas informações para esboçar gráficos que revelem os aspectos importantes das funções.

Você pode se perguntar: por que não usar simplesmente uma calculadora gráfica ou computador para traçar uma curva? Por que precisamos usar o cálculo?

É verdade que a tecnologia moderna é capaz de produzir gráficos bem precisos. Contudo, mesmo a melhor ferramenta gráfica deve ser usada inteligentemente. Vimos na Seção 1.4 que é extremamente importante escolher uma janela retangular adequada para evitar obter um gráfico que nos leve a conclusões errôneas. (Veja, em particular, os Exemplos 1, 3, 4 e 5 naquela seção.) O uso do cálculo nos possibilita descobrir os aspectos mais interessantes dos gráficos e, em muitos casos, calcular *exatamente* os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. À primeira vista ele parece razoável; ele tem a mesma forma de curvas cúbicas como $y = x^3$, e não aparenta ter ponto de máximo ou de mínimo. Mas, se você calcular a derivada, verá que existe um máximo quando $x = 0{,}75$ e um mínimo quando $x = 1$. Realmente, se dermos um *zoom* nessa parte do gráfico, veremos o comportamento exibido na Figura 2. Sem o cálculo, poderíamos facilmente não ter reparado nisso.

Na próxima seção desenharemos os gráficos de funções usando a interação entre o cálculo e as ferramentas gráficas. Nesta seção faremos gráficos considerando primeiro a informação do roteiro a seguir. Não pressupomos que você tenha uma ferramenta gráfica, mas, se você tiver alguma, use-a somente para verificar o resultado de seu trabalho.

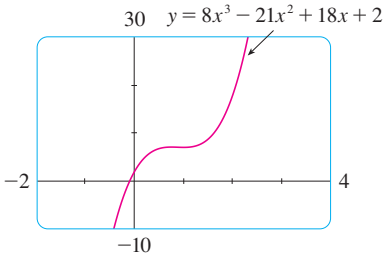


FIGURA 1

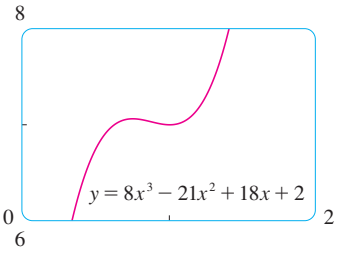


FIGURA 2

Roteiro para Esboçar uma Curva

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma curva pode não ter uma assíntotas ou possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

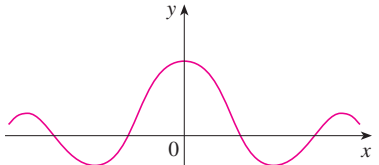
B. Intersecções com os Eixos A intersecção com o eixo y é $f(0)$. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (Você pode omitir esse passo se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

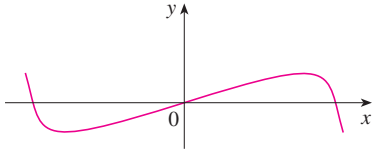
(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geqslant 0$, então precisaremos somente refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 3(a)]. Alguns exemplos são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar** e a curva é simétrica em realação à origem. Novamente, podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geqslant 0$. [Gire 180° em torno da origem; veja a Figura 3(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, onde p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é chamado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tem o período 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro (veja a Figura 4).



(a) Função par: simetria reflexional



(b) Função ímpar: simetria rotacional

FIGURA 3

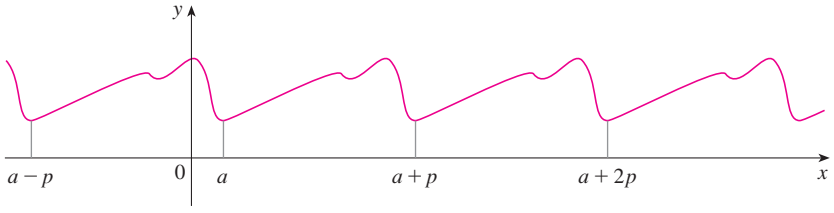


FIGURA 4
Função periódica: simetria translacional

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se, da Seção 2.6, de que se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. Se resultar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, o que também é uma informação, proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se, da Seção 2.2, de que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

1
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais, você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador, após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para outras funções esse método não se aplica.) Além disso, ao esboçar a curva é muito útil saber exatamente qual das afirmativas em [1] é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for uma extremidade do domínio de f, então você deve calcular $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x)$, seja esse limite infinito ou não.

(iii) *Assíntotas oblíquas*. Elas serão discutidas no fim desta seção.

E. Intervalos de Crescimento ou Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximos e Mínimos Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' muda de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é um máximo local. Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um local mínimo, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Pontos de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

EXEMPLO 1 Use o roteiro para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, a função f é par. A curva é simétrica em relação ao eixo y.

D.
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Uma vez que o denominador é zero quando $x = \pm 1$, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Consequentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 5 mostrando as partes da curva próximas das assíntotas.

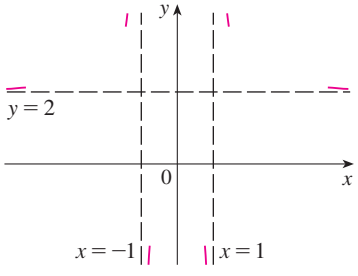


FIGURA 5
Esboço preliminar

Mostramos que a curva se aproxima de sua assíntota horizontal por cima na Figura 5; isso está confirmado pelos intervalos de crescimento e decrescimento.

E.
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(4x) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G. $$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(-4) + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Uma vez que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e -1 não estão no domínio de f.

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 6.

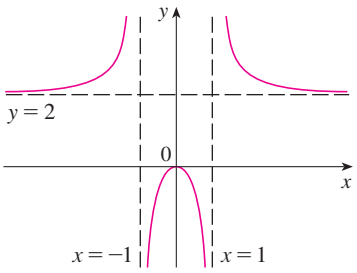


FIGURA 6
Esboço final de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Domínio $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

D. Uma vez que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

não há assíntota horizontal. Como $\sqrt{x + 1} \to 0$ quando $x \to -1^+$ e $f(x)$ é sempre positiva, temos

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

então a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x + 1}\right)}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ não está no domínio de f), então o único número crítico é 0. Como $f'(x) < 0$ quando $-1 < x < 0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 0$, f é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.

F. Uma vez que $f'(0) = 0$ e f' muda de negativa para positiva em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e absoluto) pelo Teste da Primeira Derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

Observe que o denominador é sempre positivo. O numerador é o polinômio quadrático $3x^2 + 8x + 8$, que é sempre positivo, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32$, que é negativo, e o coeficiente de x^2 é positivo. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x no domínio de f, o que significa que f é côncava para cima em $(-1, \infty)$ e não há ponto de inflexão.

H. A curva está esboçada na Figura 7.

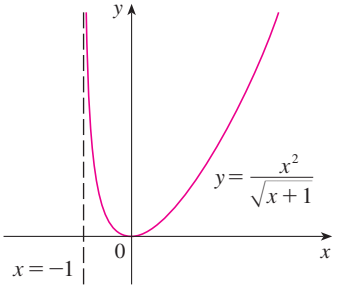


FIGURA 7

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

D. Como ambos x e e^x tornam-se grandes quando $x \to \infty$, temos que $\lim_{x \to \infty} xe^x = \infty$. Quando $x \to -\infty$, contudo, $e^x \to 0$ e temos um produto indeterminado que requer o uso da Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 1)e^x$$

Uma vez que e^x é sempre positiva, vemos que $f'(x) > 0$ quando $x + 1 > 0$ e $f'(x) < 0$ quando $x + 1 < 0$. Logo, f é crescente em $(-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1)$.

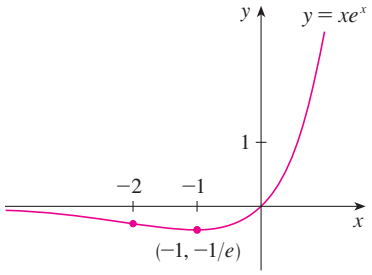


FIGURA 8

F. Como $f'(-1) = 0$ e f' muda de negativa para positiva em $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ é um mínimo local (e absoluto).

G.
$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Visto que $f''(x) > 0$ se $x > -2$ e $f''(x) < 0$ se $x < -2$, f é côncava para cima em $(-2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2)$. O ponto de inflexão é $(-2, -2e^{-2})$.

H. Usamos essa informação para traçar a curva da Figura 8.

EXEMPLO 4 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \frac{1}{2}$. As intersecções com o eixo x ocorrem quando $\cos x = 0$, ou seja, $x = (2n + 1)\,\pi/2$, em que n é um número inteiro.

C. f não é nem par nem ímpar, mas $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo x; logo, f é periódica e tem um período 2π. Dessa forma, precisamos considerar somente $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então estender a curva por translação na parte H.

D. Assíntotas: nenhuma.

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Logo, $f'(x) > 0$ quando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Assim, f é crescente em $(7\pi/6, 11\pi/6)$ e decrescente em $(0, 7\pi/6)$ e $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. A partir da parte E e do Teste da Primeira Derivada, vemos que o valor mínimo local é $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ e o valor máximo local é $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Se usarmos a regra do quociente novamente, obtemos

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Como $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ e $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para todo x, sabemos que $f''(x) > 0$ quando $\cos x < 0$, ou seja, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Assim, f é côncava para cima em $(\pi/2, 3\pi/2)$ e côncava para baixo em $(0, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 2\pi)$. Os pontos de inflexão são $(\pi/2, 0)$ e $(3\pi/2, 0)$.

H. O gráfico da função restrita a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é mostrado na Figura 9. Então, nós o estendemos, usando a periodicidade, para completar o gráfico na Figura 10.

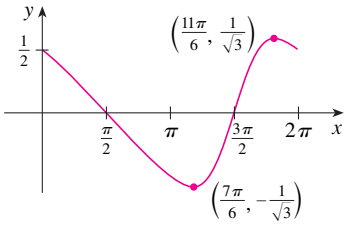


FIGURA 9

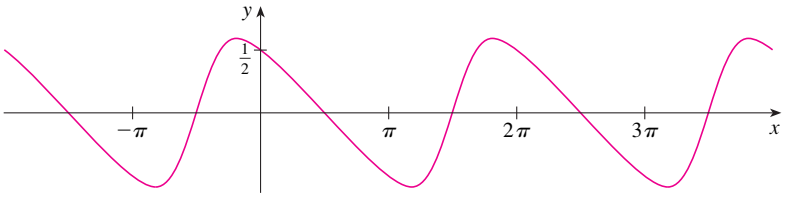


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. O domínio é

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \ln 4$. Para encontrarmos a intersecção com o eixo x, fazemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, de modo que temos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ e, portanto, as intersecções com o eixo x é $\pm\sqrt{3}$.

C. Visto que $f(-x) = f(x)$, f é par, e a curva é simétrica em relação ao eixo y.

D. Procuramos as assíntotas verticais nas extremidades do domínio. Já que $4 - x^2 \to 0^+$ quando $x \to 2^-$ e também quando $x \to -2^+$, temos

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Assim, as retas $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $-2 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $0 < x < 2$, f é crescente em $(-2, 0)$ e decrescente em $(0, 2)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = \ln 4$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Uma vez que $f''(x) < 0$ para todo x, a curva é côncava para baixo em $(-2, 2)$ e não tem ponto de inflexão.

H. Usando essa informação, esboçamos a curva na Figura 11.

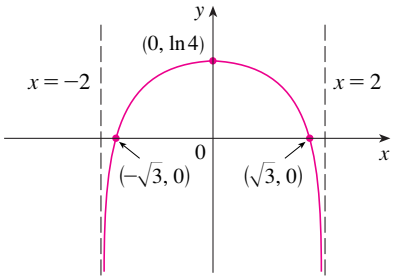


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

Assíntotas Oblíquas

Algumas curvas têm assíntotas que são *oblíquas*, isto é, não são horizontais nem verticais. Se

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

onde $m \neq 0$, então a reta $y = mx + b$ é chamada **assíntota oblíqua**, pois a distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a linha $y = mx + b$ tende a 0, como na Figura 12. (Uma situação similar existe se $x \to -\infty$.) Para funções racionais, assíntotas oblíquas acorrem quando a diferença entre os graus do numerador e do denominador é igual a 1. Neste caso, a equação de uma assíntota oblíqua pode ser encontrada por divisão de polinômios, como no exemplo a seguir.

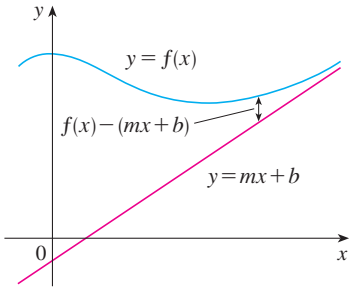


FIGURA 12

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. O domínio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Visto que $f(-x) = -f(x)$, f é ímpar, e seu gráfico, simétrico em relação à origem.

D. Como $x^2 + 1$ nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$, não há assíntotas horizontais. Mas a divisão de polinômios fornece

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \pm\infty$$

Logo, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

E.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

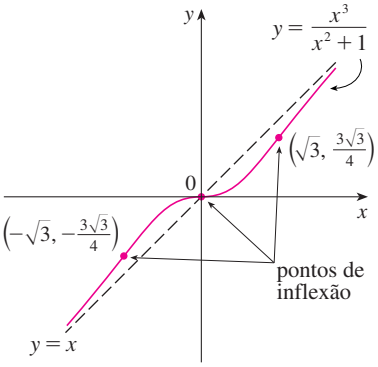


FIGURA 13

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	−	−	+	+	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	−	+	+	−	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	+	+	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	+	−	+	−	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13.

4.5 Exercícios

1–54 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x(x - 4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

15. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x - 2}$

21. $y = (x - 3)\sqrt{x}$

22. $y = 2\sqrt{x} - x$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \operatorname{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

38. $y = \sec x + \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \pi/2$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

41. $y = \operatorname{arctg}(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = x - \ln x$

46. $y = e^{2x} - e^x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

54. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

55. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

56. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico mostra sobre a força?

57. Um modelo para dispersão de um rumor é dado pela equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são constantes positivas.

(a) Quando a metade da população terá ouvido um rumor?

(b) Quando ocorre a maior taxa de dispersão do boato?

(c) Esboce o gráfico de p.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

58. Um modelo para a concentração no instante t de uma droga injetada na corrente sanguínea é

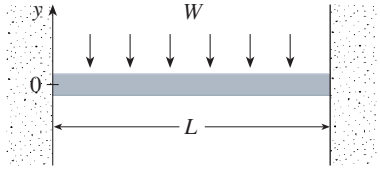
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$. Esboce o gráfico da função concentração. O que o gráfico nos diz sobre como a concentração varia conforme o tempo passa?

59. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida entre paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

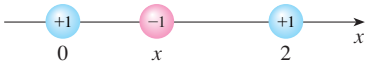
onde E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia de uma secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



60. A Lei de Coulomb afirma que a força de atração entre duas partículas carregadas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo das coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força resultante agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

onde k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força resultante. O que o gráfico mostra sobre a força?



61–64 Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

63. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

64. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

65–70 Use o roteiro desta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Mostre que a curva $y = x - \operatorname{tg}^{-1}x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

72. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

73. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas oblíquas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é *assintótica* à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

75. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 74. Use então seus resultados para auxiliá-lo no esboço do gráfico de f.

76. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem seguir o roteiro de esboço de curvas desta seção.

4.6 Representação Gráfica com Cálculo e Calculadoras

O método usado para esboçar as curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção, nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para nos assegurar de que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de ferramentas gráficas podemos nos dedicar a curvas complicadas demais para tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre o cálculo e calculadoras.

Se você ainda não leu a Seção 1.4, deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas das armadilhas das ferramentas gráficas através da escolha de janelas retangulares apropriadas.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma imagem, muitas ferramentas gráficas deduzirão uma imagem adequada a partir dos valores calculados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de uma dessas ferramentas se especificarmos que $-5 \leq x \leq 5$. Embora essa janela retangular seja útil para mostrar que o comportamento assintótico (o comportamento nas extremidades) é o mesmo que o de $y = 2x^6$, é óbvio que estão omitidos os deta-

lhes mais refinados. Assim, mudamos para a janela retangular $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ conforme mostrado na Figura 2.

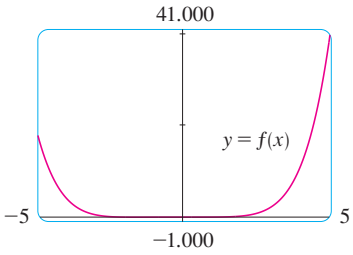


FIGURA 1

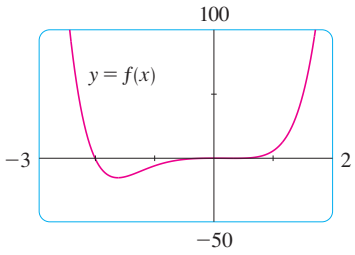


FIGURA 2

A partir desse gráfico, parece que existe um valor mínimo absoluto de cerca de $-15{,}33$ quando $x \approx -1{,}62$ (através do cursor) e f é decrescente em $(-\infty; -1{,}62)$ e crescente em $(-1{,}62; \infty)$. Aparentemente também existe uma tangente horizontal na origem e pontos de inflexão quando $x = 0$ e quando x está em algum lugar entre -2 e -1.

Vamos tentar confirmar essas impressões usando o cálculo. Derivando, obtemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Quando fazemos o gráfico de f' na Figura 3, vemos que $f'(x)$ muda de negativa para positiva quando $x \approx -1{,}62$; isso confirma (pelo Teste da Primeira Derivada) o valor mínimo encontrado anteriormente. Mas, talvez para nossa surpresa, observamos também que $f'(x)$ muda de positiva para negativa quando $x = 0$, e de negativa para positiva quando $x \approx 0{,}35$. Isso significa que f tem um máximo local em 0 e um mínimo local quando $x \approx 0{,}35$, mas esses valores estavam escondidos na Figura 2. Realmente, se dermos um *zoom* em direção à origem, como na Figura 4, veremos o que havíamos perdido antes: o valor máximo local de 0 quando $x = 0$ e um valor local mínimo de aproximadamente $-0{,}1$ quando $x \approx 0{,}35$.

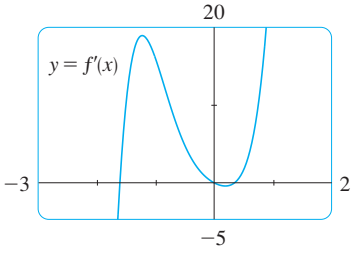


FIGURA 3

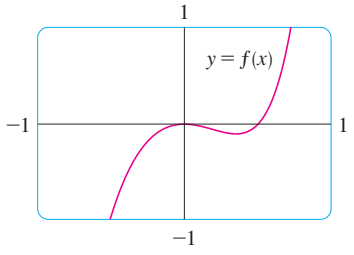


FIGURA 4

E o que dizer sobre a concavidade e os pontos de inflexão? Das Figuras 2 e 4, parece haver pontos de inflexão quando x está um pouco à esquerda de -1 e quando x está um pouco à direita de 0. Mas é difícil determinar os pontos de inflexão a partir do gráfico de f; assim, fazemos o gráfico da segunda derivada f'' na Figura 5. Vemos que f'' muda de positivo para negativo quando $x \approx -1{,}23$, e de negativa para positiva quando $x \approx 0{,}19$. Logo, com precisão de duas casas decimais, f é côncava para cima em $(-\infty; -1{,}23)$ e $(0{,}19; \infty)$ e côncava para baixo em $(-1{,}23; 0{,}19)$. Os pontos de inflexão são $(-1{,}23; -10{,}18)$ e $(0{,}19; -0{,}05)$.

Descobrimos que um único gráfico não revela todos os aspectos importantes desse polinômio. Porém, as Figuras 2 e 4, quando olhadas em conjunto, fornecem uma visualização precisa.

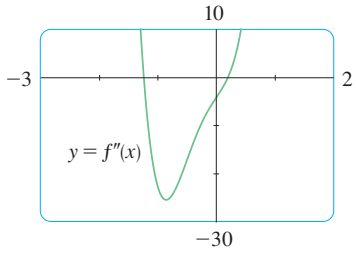


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Faça o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

em uma janela retangular que contenha todos os aspectos importantes da função. Estime os valores máximo e mínimo e os intervalos de concavidade. Então, use o cálculo para verificar o valor exato dessas quantidades.

SOLUÇÃO A Figura 6, feita por um computador com escolha automática de escala, é um desastre. Algumas calculadoras gráficas usam como janela retangular padrão $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$; assim, vamos tentar fazer isso. Obtemos o gráfico mostrado na Figura 7, e ele é uma grande melhoria.

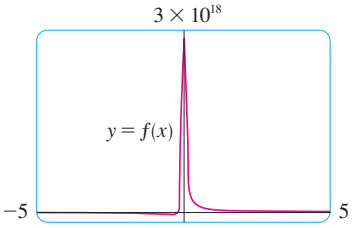


FIGURA 6

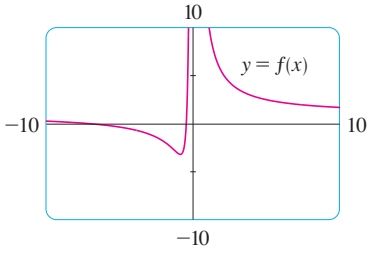


FIGURA 7

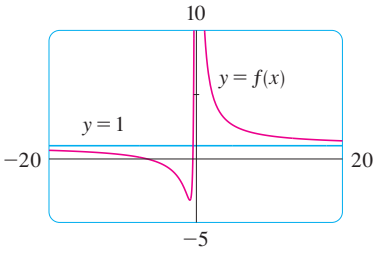


FIGURA 8

O eixo y parece ser uma assíntota vertical e realmente o é, pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

A Figura 7 também nos permite estimar as intersecções com o eixo de x em cerca de $-0{,}5$ e de $-6{,}5$. Os valores exatos são obtidos usando a fórmula quadrática para resolver a equação $x^2 + 7x + 3 = 0$; Obtemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

Para obter uma visão melhor das assíntotas horizontais, mudamos para a janela retangular $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ na Figura 8. Aparentemente, $y = 1$ é a assíntota horizontal, e isso é facilmente confirmado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

Para estimarmos o valor mínimo, damos um *zoom* para a janela de inspeção $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ da Figura 9. O cursor indica que o valor mínimo absoluto é de cerca de $-3{,}1$ quando $x \approx -0{,}9$, e vemos que a função decresce em $(-\infty; -0{,}9)$ e $(0, \infty)$ e cresce em $(-0{,}9; 0)$. Os valores exatos são obtidos por derivação:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

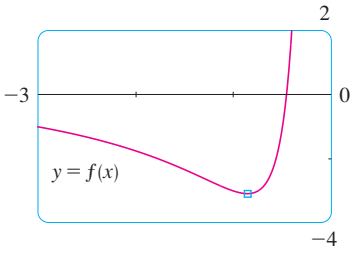


FIGURA 9

Isso mostra que $f'(x) > 0$ quando $-\frac{6}{7} < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $x < -\frac{6}{7}$. O valor mínimo exato é $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3{,}08$.

A Figura 9 também mostra que ocorre um ponto de inflexão em algum lugar entre $x = -1$ e $x = -2$. Podemos estimá-lo mais precisamente usando o gráfico da segunda derivada, o que nesse caso é tão fácil quanto achar os valores exatos. Uma vez que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Logo, f é côncava para cima em $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ e $(0, \infty)$ e côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

A análise usando as duas primeiras derivadas mostra que a Figura 8 exibe todos os aspectos mais importantes da curva.

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4}$.

SOLUÇÃO Com base em nossa experiência com a função racional no Exemplo 2, vamos começar fazendo o gráfico de f na janela retangular $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Da Figura 10 temos a

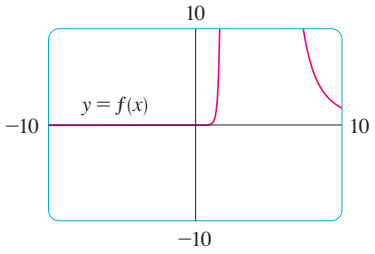


FIGURA 10

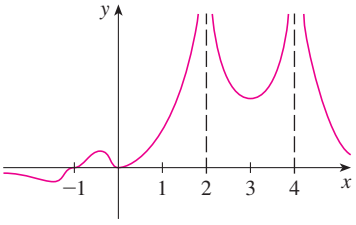


FIGURA 11

sensação de que vamos precisar dar um *zoom* para ver mais detalhadamente, e também nos afastar para ter uma visão geral melhor. Mas, como regra para dar um *zoom* inteligente, vamos primeiro analisar bem de perto a expressão de $f(x)$. Em razão dos fatores $(x-2)^2$ e $(x-4)^4$ no denominador, esperamos que $x=2$ e $x=4$ sejam assíntotas verticais. De fato,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}=\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}=\infty$$

Para encontrarmos as assíntotas horizontais, dividimos numerador e denominador por x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}=\frac{\dfrac{x^2}{x^3}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2}\cdot\dfrac{(x-4)^4}{x^4}}=\frac{\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^4}$$

Isto mostra que $f(x)\to 0$ quando $x\to\pm\infty$, de modo que o eixo x é uma assíntota horizontal.

É também muito útil considerar o comportamento do gráfico nas proximidades da intersecção com o eixo x, usando uma análise igual à do Exemplo 12 na Seção 2.6. Uma vez que x^2 é positivo, $f(x)$ não muda de sinal em 0 e, portanto, seu gráfico não cruza o eixo x em 0. No entanto, em virtude do fator $(x+1)^3$, o gráfico cruza o eixo x em -1 e tem uma tangente horizontal aí. Juntando todas essas informações, mas sem usar as derivadas, vemos que a curva deve se parecer com algo semelhante ao mostrado na Figura 11.

Agora que sabemos o que procurar, damos vários *zooms* para obter os gráficos nas Figuras 12 e 13 e afastamos várias vezes para obter a Figura 14.

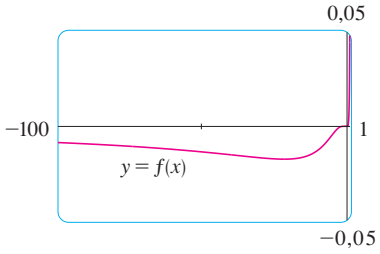


FIGURA 12

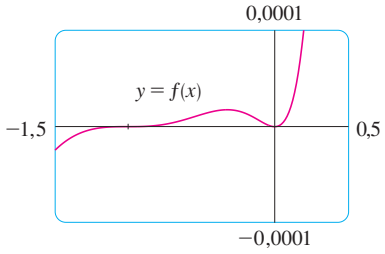


FIGURA 13

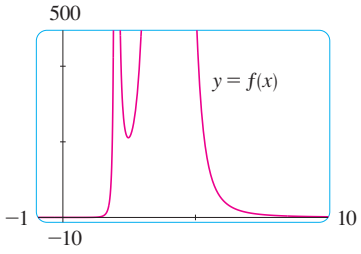


FIGURA 14

Podemos ver nesses gráficos que o mínimo absoluto está em torno de $-0{,}02$ e ocorre quando $x\approx -20$. Há também um máximo local $\approx 0{,}00002$ quando $x\approx -0{,}3$ e um mínimo local ≈ 211 quando $x\approx 2{,}5$. Esses gráficos também mostram três pontos de inflexão próximos a -35, -5 e -1, e dois entre -1 e 0. Para estimarmos os pontos de inflexão mais precisamente, necessitaremos do gráfico de f'', mas calcular à mão f'' é uma tarefa não razoável. Se você tiver um sistema de computação algébrica, então não encontrará maiores problemas (veja o Exercício 15).

Vimos que para essa função particular são necessários *três* gráficos (Figuras 12, 13 e 14) para juntar todas as informações úteis. A única maneira de dispor todos esses aspectos da função em um único gráfico é fazê-lo à mão. A despeito dos exageros e distorções, a Figura 11 consegue resumir a natureza essencial da função.

A família de funções

$$f(x)=\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} cx)$$

onde c é uma constante, ocorre em aplicações de síntese de frequência modulada (FM). Uma onda senoidal é modulada por uma onda de frequência diferente (sen cx). O caso em que $c=2$ é estudado no Exemplo 4. O Exercício 27 lida com outro caso especial.

EXEMPLO 4 Faça o gráfico da função $f(x)=\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} 2x)$. Para $0\leq x\leq \pi$, estime todos os valores máximo e mínimo, intervalos de crescimento e de decrescimento, e pontos de inflexão.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que f é periódica com período de 2π. Também, f é ímpar e $|f(x)|\leq 1$ para todo x. Então, a escolha de visualizar um retângulo não é um problema para esta função: começamos com $[0,\pi]$ por $[-1{,}1;1{,}1]$. (Veja a Figura 15.) Parece que existem três valores máximos locais e dois mínimos locais nessa janela. Para confirmarmos isso e localizá-los mais precisamente, calculamos que

$$f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

e fazemos os gráficos de f e f' na Figura 16.

Dando um *zoom* e usando o Teste da Primeira Derivada, encontramos os seguintes valores aproximados.

Intervalos de crescimento:	(0; 0,6), (1,0; 1,6), (2,1; 2,5)
Intervalos de decrescimento:	(0,6; 1,0), (1,6; 2,1), (2,5; π)
Valores máximos locais:	$f(0{,}6) \approx 1$, $f(1{,}6) \approx 1$, $f(2{,}5) \approx 1$
Valores mínimos locais:	$f(1{,}0) \approx 0{,}94$, $f(2{,}1) \approx 0{,}94$

A segunda derivada é

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x) - 4 \operatorname{sen} 2x \cos(x + \operatorname{sen} 2x)$$

Fazendo o gráfico de f e f'' na Figura 17, obtemos os seguintes valores aproximados:

Côncava para baixo:	(0,8; 1,3), (1,8; 2,3)
Côncava para baixo:	(0; 0,8), (1,3; 1,8), (2,3; π)
Pontos de inflexão:	(0; 0), (0,8; 0,97), (1,3; 0,97), (1,8; 0,97), (2,3; 0,97)

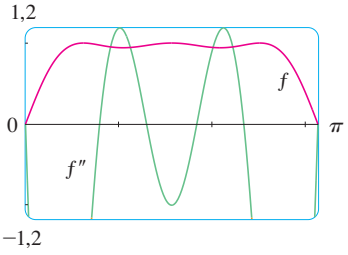


FIGURA 17

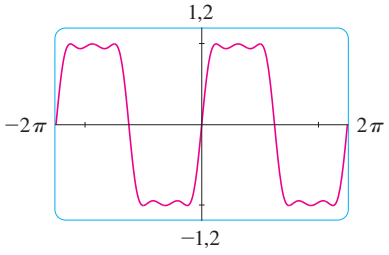


FIGURA 18

A Figura 15 realmente representa precisamente f para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, e assim podemos afirmar que o gráfico estendido na Figura 18 representa f precisamente para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Nosso último exemplo trata de *famílias* de funções. Conforme discutido na Seção 1.4, isso significa que as funções na família estão relacionadas umas às outras por uma fórmula que contém uma ou mais constantes arbitrárias. Cada um dos valores da constante dá origem a um membro da família, e a ideia é ver como varia o gráfico da função à medida que mudamos a constante.

EXEMPLO 5 Como o gráfico de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ varia conforme c varia?

SOLUÇÃO Os gráficos nas Figuras 19 e 20 (os casos especiais $c = 2$ e $c = -2$) mostram duas curvas com aspectos bem diferentes. Antes de fazermos qualquer outro gráfico, vamos ver o que os membros dessa família têm em comum. Uma vez que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para todo valor de c, todos têm como assíntota horizontal o eixo x. Uma assíntota vertical ocorrerá quando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Quando $c > 1$, não há assíntotas verticais (como na Figura 19). Quando $c = 1$, o gráfico tem uma única assíntota vertical $x = -1$, pois

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

Quando $c < 1$, há duas assíntotas verticais: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como na Figura 20).

Calculamos agora a derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

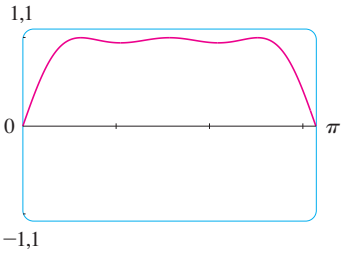


FIGURA 15

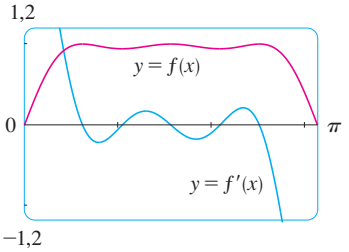


FIGURA 16

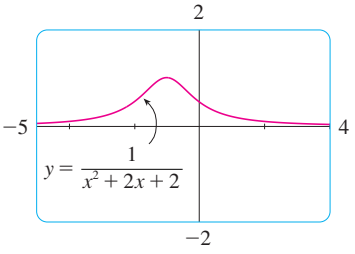


FIGURA 19
$c = 2$

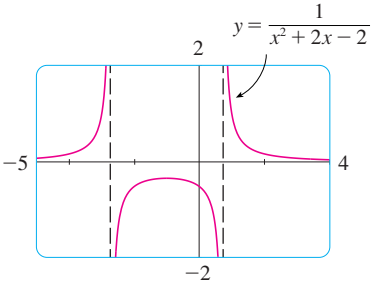


FIGURA 20
$c = -2$

Isso mostra que $f'(x) = 0$ quando $x = -1$ (se $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ quando $x < -1$, e $f'(x) < 0$ quando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$ isso significa que f é crescente em $(-\infty, -1)$ e decrescente em $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, existe um valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ é um valor máximo local, e os intervalos de crescimento e decrescimento são interrompidos nas assíntotas verticais.

A Figura 21 mostra cinco membros da família, feitos na janela retangular $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Conforme previsto, $c = 1$ é o valor no qual ocorre uma transição de duas assíntotas verticais para uma e depois para nenhuma. À medida que aumentamos c a partir de 1, vemos que o ponto de máximo fica cada vez mais baixo; isso é explicado pelo fato de que $1/(c - 1) \to 0$ quando $c \to \infty$. À medida que c decresce a partir de 1, as assíntotas verticais ficam cada vez mais separadas, pois a distância entre elas é $2\sqrt{1 - c}$, que fica maior à medida que $c \to -\infty$. Novamente, o ponto de máximo tende ao eixo x, pois $1/(c - 1) \to 0$ quando $c \to -\infty$.

TEC Veja uma animação na Figura 21 em *Visual 4.6.*

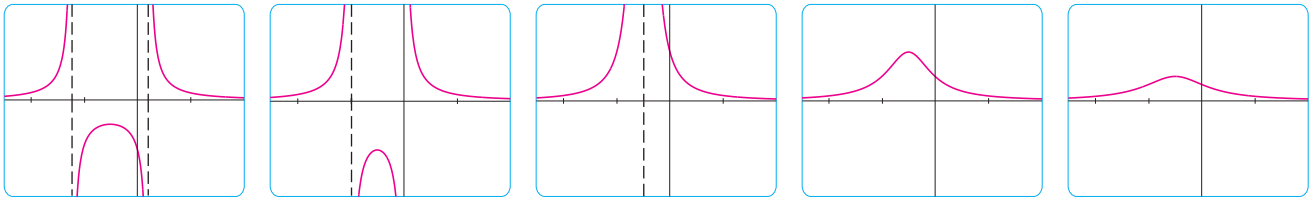


FIGURA 21 A família das funções $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente não há pontos de inflexão quando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calculamos que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

e deduzimos que os pontos de inflexão ocorrem quando $x = -1 \pm \sqrt{3(c - 1)}/3$. Portanto, os pontos de inflexão tornam-se mais afastados à medida que c cresce, e isso parece plausível a partir das duas últimas partes da Figura 21.

4.6 Exercícios

1–8 Faça gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Em particular, você deve usar os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2.500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x + 5 \cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7 \cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = e^x - 0{,}186x^4$

9–10 Faça gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Estime os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão, e use o cálculo para achar essas quantidades exatamente.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Use a Regra de l'Hôspital para explicar o comportamento quando $x \to 0$.

(c) Estime o valor mínimo e os intervalos de concavidade. Então, use o cálculo para achar os valores exatos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$ **12.** $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Esboce o gráfico à mão, usando as assíntotas e as intersecções com os eixos, mas não as derivadas. Então, use seu esboço como um roteiro na obtenção de gráficos (com uma ferramenta gráfica) que

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador — SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

mostrem os aspectos mais importantes da curva. Use esses gráficos para estimar os valores máximo e mínimo.

13. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$ **14.** $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

SCA **15.** Se f for a função considerada no Exemplo 3, use um sistema de computação algébrica para calcular f' e então faça seu gráfico para confirmar que todos os valores máximos e mínimos são como dados no exemplo. Calcule f'' e use-a para estimar os intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

SCA **16.** Se f for a função do Exercício 14, encontre f' e f'' e use seus gráficos para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento e de concavidade de f.

SCA **17–22** Use um sistema de computação algébrica para fazer o gráfico de f e encontrar f' e f''. Utilize os gráficos dessas derivadas para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão de f.

17. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5\,\operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)\,e^{\operatorname{arctg} x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}$

SCA **23–24** Faça o gráfico da função usando quantas visualizações retangulares você precisar para descrever a verdadeira natureza da função.

23. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x^4)}{x^8}$ **24.** $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$

SCA **25–26**

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Explique a forma do gráfico calculando o limite quando $x \to 0^+$ ou quando $x \to \infty$.

(c) Estime os valores máximo e mínimo e então use o cálculo para achar os valores exatos.

(d) Use um gráfico de f'' para estimar a coordenada x dos pontos de inflexão.

25. $f(x) = x^{1/x}$ **26.** $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

27. No Exemplo 4 consideramos um membro da família de funções $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que ocorre na síntese de FM. Aqui investigamos a função com $c = 3$. Comece o gráfico f com a janela retangular $[0, \pi]$ por $[-1{,}2;\ 1{,}2]$. Quantos pontos de máximo locais você pode ver? O gráfico tem mais informações do que podemos perceber a olho nu. Para descobrir os pontos de máximo e mínimo escondidos será necessário examinar muito cuidadosamente o gráfico de f'. De fato, ajuda examinar ao mesmo tempo o gráfico de f''. Encontre todos os valores máximos e mínimos e os pontos de inflexão. Então faça o gráfico de f na janela retangular $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1{,}2;\ 1{,}2]$ e comente sobre a simetria.

28–35 Descreva a mudança no gráfico de f à medida que c varia. Faça o gráfico de vários membros da família para ilustrar as tendências que você descobriu. Em particular, você deve investigar como os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão movem-se quando c varia. Você deve também identificar qualquer valor intermediário de c no qual o aspecto básico da curva mude.

28. $f(x) = x^3 + cx$

29. $f(x) = \sqrt{x^4 + cx^2}$ **30.** $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

31. $f(x) = e^x + ce^{-x}$ **32.** $f(x) = \ln(x^2 + c)$

33. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$ **34.** $f(x) = x^2 + ce^{-x}$

35. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

36. A família de funções $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e c são números positivos e $b > a$, tem sido usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante $t = 0$. Faça o gráfico de vários membros dessa família. O que eles têm em comum? Para valores fixos de C e a, descubra graficamente o que acontece à medida que b cresce. Use então o cálculo para demonstrar o que você descobriu.

37. Investigue a família de curvas dadas por $f(x) = xe^{-cx}$, em que c é um número real. Comece calculando os limites quando $x \to \pm\infty$. Identifique qualquer valor intermediário de c onde mude a forma básica. O que acontece aos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão quando c varia? Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família.

38. Investigue a família de curvas dadas pela equação $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comece determinando o valor de transição de c em que o número de pontos de inflexão muda. Faça então o gráfico de vários membros da família para ver quais formas são possíveis. Existe outro valor de transição de no qual a quantidade de números críticos muda. Tente descobrir isso graficamente. Demonstre então o que você descobriu.

39. (a) Investigue a família de funções polinomiais dada pela equação $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. Para quais valores de c a curva tem pontos de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo para cada curva da família estão sobre a parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre fazendo o gráfico dessa parábola e de vários membros da família.

40. (a) Investigue a família de funções polinomiais dada pela equação $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. Para que valores de c a curva tem pontos de máximo e de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo de cada curva da família estão sobre a curva $y = x - x^3$. Ilustre fazendo o gráfico dessa curva e de vários membros da família.

4.7 Problemas de Otimização

Os métodos estudados neste capítulo para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Na solução destes problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios da resolução de problemas discutidos anteriormente e adaptá-los para estas situações:

SP

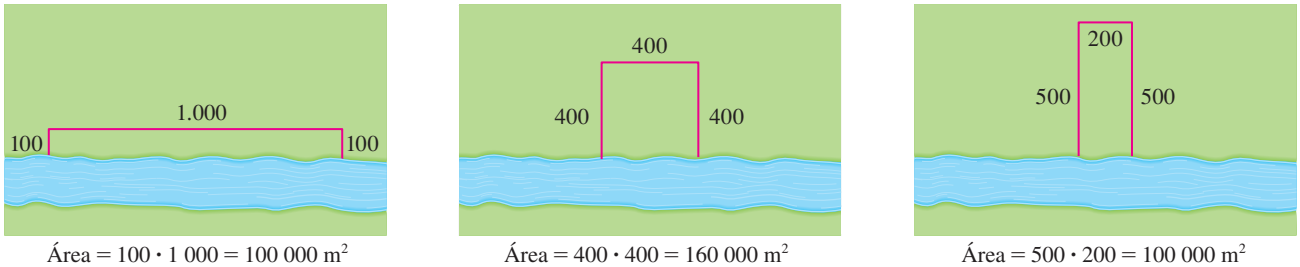
Passos na Resolução dos Problemas de Otimização

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.
5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f é um intervalo fechado, então o Método de Intervalo Fechado da Seção 1.4 pode ser usado.

EXEMPLO 1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

SP Entendendo o problema
SP Analogia: tente casos especiais
SP Faça diagramas

SOLUÇÃO A fim de percebermos o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três maneiras possíveis de estender os 1 200 m de cerca.



Área = 100 · 1 000 = 100 000 m² | Área = 400 · 400 = 160 000 m² | Área = 500 · 200 = 100 000 m²

FIGURA 1

Vemos que, ao tentarmos os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área A do retângulo. Sejam x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y:

$$A = xy$$

Queremos expressar A como uma função de apenas uma variável; assim, eliminamos y expressando-o em termos de x. Para fazermos isso, usamos a informação dada de que o comprimento total da cerca é de 1 200 m. Logo,

$$2x + y = 1\,200$$

Dessa equação, temos $y = 1.200 - 2x$, resultando assim

$$A = x(1\,200 - 2x) = 1\,200x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ e $x \leqslant 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1\,200x - 2x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

A derivada é $A'(x) = 1\,200 - 4x$; logo, para encontrarmos os números críticos, resolvemos a equação

$$1\,200 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 300$. O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em uma extremidade do intervalo. Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ e $A(600) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(300) = 180\,000$.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x; logo, A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 300$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão.

SP Introduza uma notação.

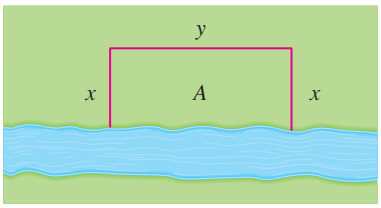


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

SOLUÇÃO Fazemos o diagrama como na Figura 3, onde r é o raio e h é a altura (ambos em centímetros). A fim de minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lado). Da Figura 4, vemos que o lado é feito de uma folha retangular com dimensões $2\pi r$ e h. Logo a área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminarmos h, usamos o fato de que o volume é dado como 1 L, que é igual a 1 000 cm^3. Logo,

$$\pi r^2 h = 1\,000$$

que nos fornece $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Substituindo na expressão para A, temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para acharmos os números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

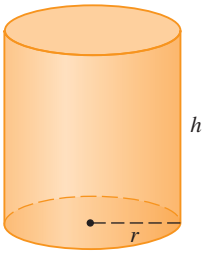


FIGURA 3

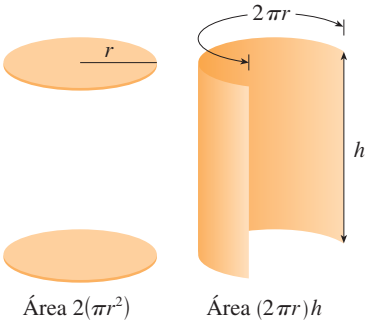


FIGURA 4

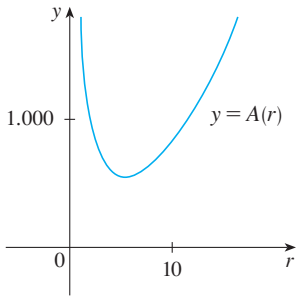


FIGURA 5

Ainda neste capítulo, no Projeto Aplicado da página 304, examinaremos a forma mais econômica para uma lata levando em conta outros custos de produção.

Uma vez que o domínio de A é $(0, \infty)$, não podemos usar o argumento do Exemplo 1 relativo às extremidades. Mas podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, portanto, A está decrescendo para *todo* r à esquerda do número crítico e crescendo para *todo* r à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve originar um *mínimo absoluto*.

[Alternativamente, poderíamos argumentar que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$; portanto, deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no número crítico. Veja a Figura 5.]

O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2} = \frac{1.000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e a altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro.

OBSERVAÇÃO 1 O argumento usado no Exemplo 2 para justificar o mínimo absoluto é uma variação do Teste da Primeira Derivada (que se aplica somente para valores máximo e mínimo *locais*) e será enunciado aqui para futuras referências.

TEC *Module 4.7* leva você a seis problemas adicionais de otimização, incluindo animações de situações físicas.

Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

OBSERVAÇÃO 2 Um método alternativo para resolver os problemas de otimização é usar a derivação implícita. Para ilustrarmos esse método, examinaremos novamente o Exemplo 2. Vamos nos utilizar das mesmas equações

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1\,000$$

mas, em vez de eliminarmos h, derivamos implicitamente ambas as equações em relação a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

O mínimo ocorre em um número crítico; assim, fazemos $A' = 0$, simplificamos e chegamos até as equações

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

e uma subtração nos fornece $2r - h = 0$ ou $h = 2r$.

EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

SOLUÇÃO A distância entre os pontos $(1, 4)$ e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

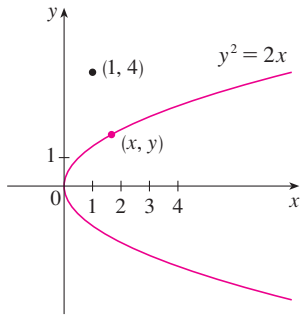


FIGURA 6

(Veja a Figura 6.) Mas, como o ponto (x, y) está sobre a parábola, então $x = \frac{1}{2}y^2$; logo, a expressão para d fica

$$d = \sqrt{(\tfrac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

(Uma forma alternativa seria substituir $y = \sqrt{2x}$ para obter d em termos só de x.) Em vez de d, minimizamos seu quadrado:

$$d^2 = f(y) = (\tfrac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2$$

(Você deve se convencer de que o mínimo de d ocorre no mesmo ponto que o mínimo de d^2, porém é mais fácil de se lidar com d^2.). Derivando, obtemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

portanto, $f'(y) = 0$ quando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ quando $y < 2$ e $f'(y) > 0$ quando $y > 2$; logo, pelo Teste da Primeira Derivada para os Valores Extremos Absolutos, o mínimo absoluto ocorre quando $y = 2$. (Ou, ainda, poderíamos simplesmente dizer que, dada a natureza geométrica do problema, é óbvio que existe um ponto mais próximo, mas não existe um ponto mais distante.) O valor correspondente de x é $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Assim, o ponto sobre $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$ é $(2, 2)$.

EXEMPLO 4 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura 7). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)

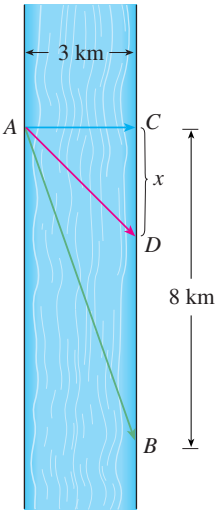


FIGURA 7

SOLUÇÃO Se chamarmos de x a distância de C a D, então a distância a ser percorrida a pé será $|DB| = 8 - x$, e o Teorema de Pitágoras dará a distância remada como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Usamos a equação

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$$

Então o tempo gasto remando é $\sqrt{x^2 + 9}/6$, enquanto o tempo gasto andando é $(8 - x)/8$. Assim, o tempo total T como uma função de x é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

O domínio dessa função T é $[0, 8]$. Observe que, se $x = 0$, ele rema para C, e se $x = 8$, ele rema diretamente para B. A derivada de T é

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Assim, usando o fato de que $x \geqslant 0$, temos

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2 + 9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

O único número crítico é $x = 9/\sqrt{7}$. Para verificarmos se o mínimo ocorre nesse número crítico ou nas extremidades do domínio $[0, 8]$, calculamos T em todos os três pontos:

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42$$

Uma vez que o menor desses valores T ocorre quando $x = 9/\sqrt{7}$, o valor mínimo absoluto de T deve ocorrer lá. A Figura 8 ilustra esse cálculo mostrando o gráfico de T.

Dessa forma, o homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx 3{,}4$ km) rio abaixo a partir do ponto inicial.

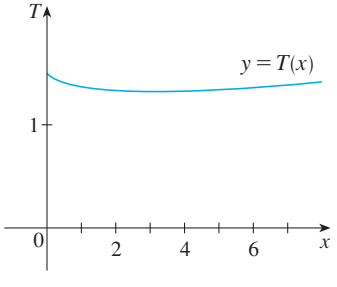


FIGURA 8

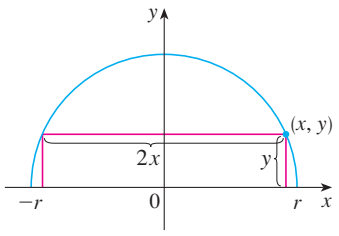


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

SOLUÇÃO 1 Vamos considerar o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Então a palavra *inscrito* significa que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois vértices sobre o eixo x, conforme mostra a Figura 9.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. E então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

Para eliminarmos y, usamos o fato de que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leqslant x \leqslant r$. Sua derivada é

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que é zero quando $2x^2 = r^2$, isto é, $x = r/\sqrt{2}$ (uma vez que $x \geqslant 0$). Esse valor de x dá um valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

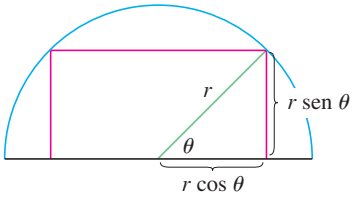


FIGURA 10

SOLUÇÃO 2 Uma solução mais simples é possível quando usamos um ângulo como uma variável. Seja θ o ângulo mostrado na Figura 10. Então, a variação na área do retângulo é

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = r^2(2\,\text{sen}\,\theta\ \cos\theta) = r^2\,\text{sen}\,2\theta$$

Sabemos que sen 2θ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo, $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Observe que essa solução trigonométrica não envolve derivação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui.

Aplicações à Administração e à Economia

Na Seção 3.7 introduzimos a ideia de custo marginal. Lembre que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de certo produto, então o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função custo.

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é chamada **função receita**. A derivada R' da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro. Nos Exercícios 57–62, lhe será pedido para usar as funções custo, receita e lucro marginais para minimizar custos e maximizar receitas e lucros.

EXEMPLO 6 Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a $ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

SOLUÇÃO Se x for o número de reprodutores de Blu-ray vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em $ 10. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de $ 125.

4.7 Exercícios

1. Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.
   (a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro número	Segundo número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

   (b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

4. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?

5. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leqslant x \leqslant 2$?

6. Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

7. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

8. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

9. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

   onde k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

10. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

    em que I é a intensidade da luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz P é máximo?

11. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para a área total.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

12. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.
(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para o volume.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

13. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

14. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

15. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

16. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa \$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

17. Faça o Exercício 16 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

18. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma dada área, aquele com a menor área é um quadrado.
(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

19. Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.

20. Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto (3, 0).

21. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto (1, 0).

22. Encontre, com precisão de duas casas decimais, as coordenadas do ponto na curva $y = \operatorname{sen} x$ que está mais próximo do ponto (4, 2).

23. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

24. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

25. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

26. Encontre a área do maior trapézio que pode ser inscrito num círculo com raio 1 e cuja base é o diâmetro do círculo.

27. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

28. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

29. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

30. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

31. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior superfície possível para este cilindro.

32. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. Veja o Exercício 62.) Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

33. As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

34. Um pôster deve ter uma área de 900 cm^2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

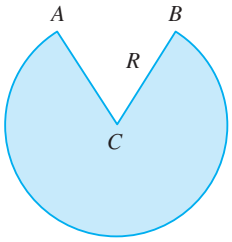
35. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

36. Responda o Exercício 35 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

37. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

38. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

39. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



40. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

41. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

42. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada coeficiente de atrito. Para qual valor de θ é F menor?

43. Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor mínimo da potência?

44. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u ($u < v$), então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

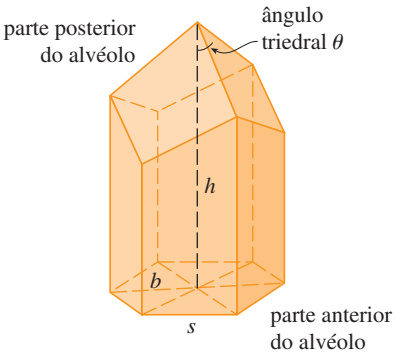
$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.
(a) Determine o valor de v que minimiza E.
(b) Esboce o gráfico de E.
Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

45. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg}\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\operatorname{cossec}\theta,$$

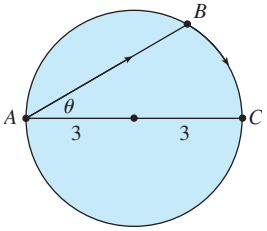
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.
(a) Calcule $dS/d\theta$.
(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?
(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).
Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2°.



46. Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

47. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

48. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como ela deve proceder?



49. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400.000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800.000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

50. Suponha que a refinaria do Exercício 49 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

51. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

52. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

53. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

54. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

55. Qual é o menor comprimento de um segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e é tangente à curva $y = 3/x$ em algum ponto?

56. Qual é a menor área de um triângulo que é cortado pelo primeiro quadrante e cuja hipotenusa é tangente à parábola $y = 4 - x^2$ em algum ponto?

57. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

58. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

59. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço do ingresso a \$ 10, a média de público tem sido de 27 000. Quando os ingressos abaixaram para \$ 8, a média de público subiu para 33 000.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

60. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.

(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

61. Um fabricante tem vendido 1 000 aparelhos de televisão de tela plana por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada \$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.

(a) Encontre a função demanda.

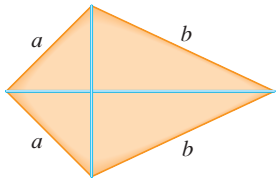
(b) Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?

(c) Se sua função custo semanal for $C(x) = 68\,000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?

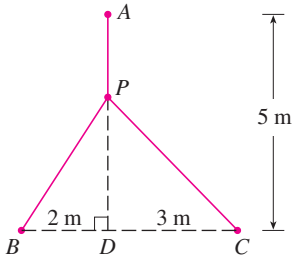
62. O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada \$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?

63. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

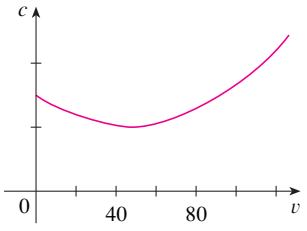
SCA **64.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



65. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo de L.



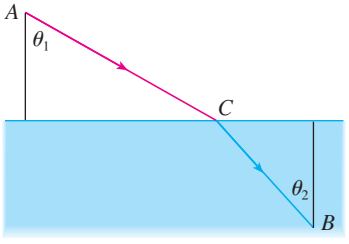
66. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetro*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



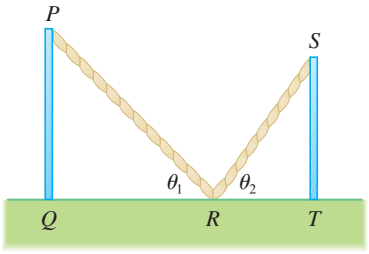
67. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

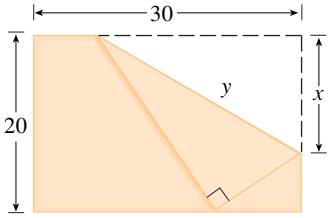
onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.



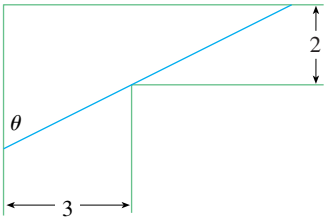
68. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.



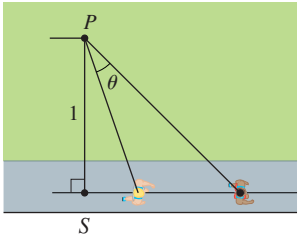
69. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



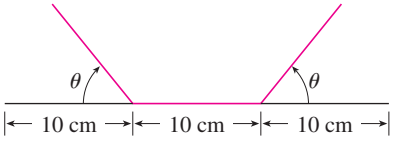
70. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



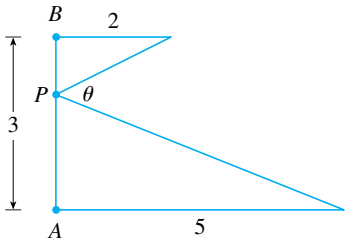
71. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Dica*: Maximize tg θ.]



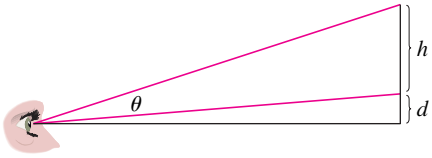
72. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como θ deve ser escolhido para que a calha carregue a maior quantidade de água possível?



73. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?



74. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)

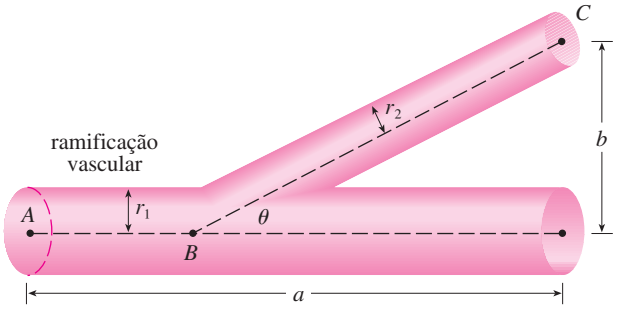


75. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Dica*: Expresse a área como uma função do ângulo θ.]

76. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu essa lei experimentalmente, mas também seguiu a Equação 8.4.2.) A figura mostra um vaso sanguíneo principal de raio r_1 ramificado em um ângulo θ em um vaso menor de raio r_2.



(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

(b) Demonstre que essa resistência é minimizada quando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (com precisão de um grau) quando o raio do vaso sanguíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.

Manfred Kage/Peter Arnold Images/Photolibrary

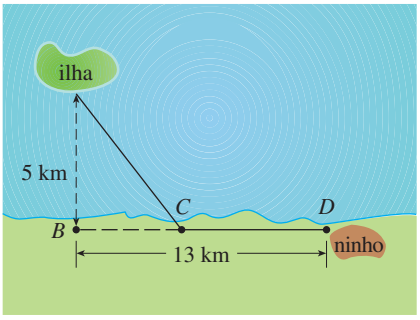
77. Os ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar voos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é necessária mais energia para voar sobre a água que a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e desce sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está a 5 km do ponto mais próximo B sobre uma praia reta, voa para um ponto C na praia e então voa ao longo da praia para a área D, seu ninho. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos B e D distam 13 km um do outro.

(a) Em geral, se é preciso 1,4 vezes mais energia para voar sobre a água do que sobre a terra, para que ponto C o pássaro precisa voar para minimizar a energia total gasta no retorno ao ninho?

(b) Sejam W e L a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado, em termos do voo do pássaro, de grandes valores da razão W/L? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão W/L correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

(c) Qual deveria ser o valor de W/L a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho D? Qual deveria ser o valor de W/L para o pássaro voar para B e então seguir ao longo da praia para D?

(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de B, quantas vezes mais energia será despendida pelo pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?



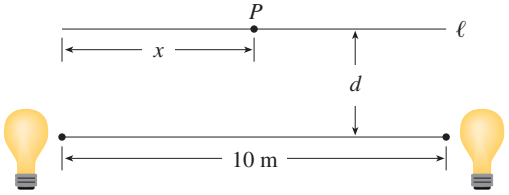
78. Duas fontes de luz de igual potência estão colocadas a 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto P sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz a uma distância d metros dela (veja a figura). Queremos localizar P em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto P.

(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando P está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ m, mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

(d) Em algum ponto entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de d no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de d por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de d.

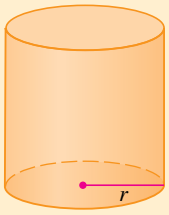


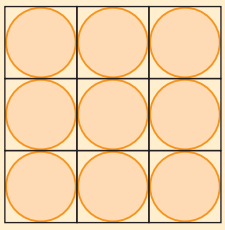
PROJETO APLICADO A FORMA DE UMA LATA

Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como se o volume V de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura h e o raio r que minimizasse no custo do metal para fazer a lata (veja a figura). Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria minimizar a área da superfície do cilindro. Resolvendo esse problema no Exemplo 2 da Seção 4.7, descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você olhar seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se conseguimos explicar este fenômeno.

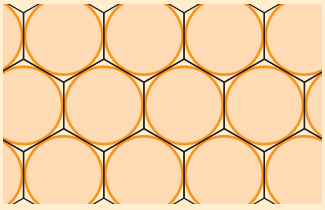
1. O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados dobrando-se retângulos; esses retângulos são cortados da folha com uma pequena ou nenhuma

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador





Discos cortados a partir de quadrados



Discos cortados a partir de hexágonos

perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (como na figura), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, mas que tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$$

2. Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura). Mostre que se for adotada essa estratégia, então

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2{,}21$$

3. Os valores de h/r que encontramos nos Problemas 1 e 2 estão muito próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que aqueles que são dobrados sobre as extremidades da lata. Se permitíssemos isso, aumentaríamos h/r. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em ligar os lados às bordas para formar as latas. Se cortássemos os discos dos hexágonos como no Problema 2, então o custo total seria proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

onde k é o inverso do comprimento que pode ser ligado ao custo por uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Desenhe $\sqrt[3]{V}/k$ como uma função de $x = h/r$ e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, deveríamos fazer h/r aproximadamente 2,21 (como no Problema 2). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara, h/r deve ser substancialmente maior.

5. Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é de forma geral verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?

4.8 Método de Newton

Suponha que um vendedor de carro ponha um carro à venda por $ 18.000, ou em pagamentos de $ 375 mensais durante cinco anos. Você gostaria de saber qual a taxa de juros mensal que o vendedor de fato está cobrando. Para encontrar a resposta você deve resolver a equação

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad \boxed{1}$$

(Os detalhes são explicados no Exercício 41.) Como você deve resolver a equação?

Para uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ existe uma fórmula bem conhecida para as raízes. Para as equações de terceiro e quarto grau também existem fórmulas para as raízes, mas elas são extremamente complicadas. Se f for um polinômio de grau 5 ou maior, não existe nenhuma fórmula. Da mesma forma, não existe uma fórmula que nos possibilite encontrar as raízes exatas de uma equação transcendental como $\cos x = x$.

Podemos encontrar uma solução *aproximada* para a Equação 1 traçando o lado esquerdo da equação. Usando uma ferramenta gráfica, e após experimentar com janela retangular, obtemos o gráfico na Figura 1.

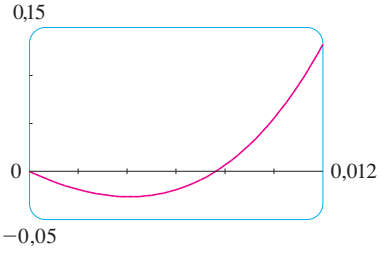


FIGURA 1

Tente resolver a Equação 1 usando o método numérico de encontrar raízes em sua calculadora ou computador. Algumas máquinas não são capazes de resolvê-la. Outras têm sucesso, mas requerem que você especifique um ponto inicial para a busca.

Vemos também que além da solução $x = 0$, que não nos interessa, há uma solução entre 0,007 e 0,008. Aproximando, vemos que a raiz é de aproximadamente 0,0076. Se precisássemos de maior precisão, poderíamos aproximar repetidamente, mas isso se tornaria cansativo. Uma alternativa mais rápida é usar um método numérico de encontrar raízes em uma calculadora ou um SCA. Se fizermos isso, encontraremos que a raiz correta até a nona casa decimal é 0,007628603.

Como funcionam esses métodos numéricos de encontrar raízes? É usada uma variedade de métodos, mas a maior parte usa o **método de Newton**, também denominado **método de Newton-Raphson**. Vamos explicar agora como funciona esse método, parcialmente para mostrar o que acontece dentro de uma calculadora ou computador, e parcialmente como uma aplicação da ideia de aproximação linear.

A geometria por trás do método de Newton é mostrada na Figura 2, onde a raiz que estamos tentando achar é chamada r. Começamos com uma primeira aproximação x_1, que é obtida por conjectura, ou de um esboço rápido do gráfico de f, ou de um gráfico gerado por computador de f. Considere a reta tangente L à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ e veja a intersecção de L com o eixo x, denominada x_2. A ideia por trás do método de Newton é que a reta tangente fica próxima da curva; assim, a intersecção com o eixo x, x_2, está próxima da intersecção com o eixo x da curva (isto é, a raiz r que estamos procurando). Como a tangente é uma reta, podemos facilmente encontrar sua intersecção com o eixo x.

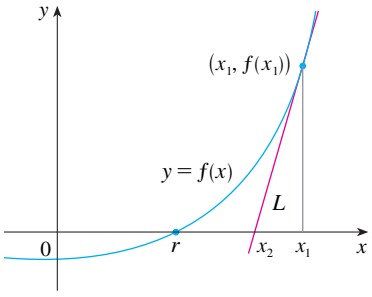


FIGURA 2

Para encontrarmos uma fórmula para x_2 em termos de x_1, usamos o fato de que a inclinação de L é $f'(x_1)$; assim, sua equação é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Uma vez que a intersecção com o eixo x de L é x_2, fazemos $y = 0$ e obtemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, podemos isolar x_2 nessa equação:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Usamos x_2 como uma segunda aproximação a r.

A seguir repetimos o procedimento com x_1 substituído por x_2, usando a reta tangente em $(x_2, f(x_2))$. Isso dá uma terceira aproximação:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

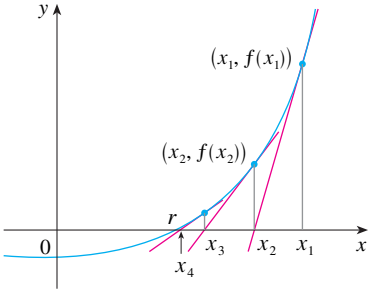


FIGURA 3

Se ficarmos repetindo esse processo, obteremos uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, conforme mostra a Figura 3. Em geral, se a n-ésima aproximação é x_n e $f'(x_n) \neq 0$, então a aproximação seguinte é dada por

2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Sequências foram introduzidas brevemente em *Uma Apresentação do Cálculo*. Veremos mais sobre sequências na Seção 11.1, no segundo volume desta obra.

Se os números x_n ficarem cada vez mais próximos de r à medida que n cresce, dizemos que a sequência *converge* para r e escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

⊘ Embora a sequência de aproximações sucessivas convirja para a raiz desejada no caso das funções do tipo ilustrado na Figura 3, em certas circunstâncias a sequência pode não convergir. Por exemplo, considere a situação mostrada na Figura 4. Você pode ver que x_2

é uma aproximação pior que x_1. Esse é provavelmente o caso quando $f'(x_1)$ está próximo de 0. Pode até acontecer de uma aproximação (tal como x_3 na Figura 4) cair fora do domínio de f. Então o método de Newton falha e uma melhor aproximação inicial x_1 deve ser escolhida. Veja os Exercícios 31–34 para exemplos específicos nos quais o método de Newton funciona muito lentamente ou não funciona.

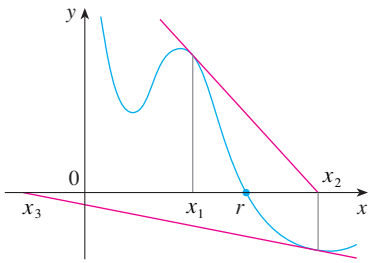


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Começando com $x_1 = 2$, encontre a terceira aproximação x_3 para a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUÇÃO Vamos aplicar o método de Newton com

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

O próprio Newton usou essa equação para ilustrar seu método, e escolheu $x_1 = 2$ após algumas experiências, pois $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ e $f(3) = 16 = 16$. A Equação 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2{,}1$$

Então com $n = 2$, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2{,}1 - \frac{(2{,}1)^3 - 2(2{,}1) - 5}{3(2{,}1)^2 - 2} \approx 2{,}0946$$

Resulta que essa terceira aproximação $x_3 \approx 2{,}0946$ é precisa até quatro casas decimais. ■

TEC No *Module 4.8*, você pode investigar como o método de Newton funciona para várias funções e o que acontece quando você muda x_1.

A Figura 5 mostra a geometria atrás do primeiro passo do método de Newton para o Exemplo 1. Como $f'(2) = 10$, a reta tangente $y = x^3 - 2x - 5$ em $(2, -1)$ tem equação igual $y = 10x - 21$ cujo zero está em $x_2 = 2{,}1$.

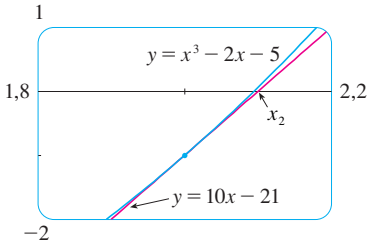


FIGURA 5

Suponha que queiramos obter uma dada precisão, digamos de oito casas decimais, empregando o método de Newton. Como saber quando devemos parar? O procedimento experimental geralmente usado é que devemos parar quando duas aproximações sucessivas x_n e x_{n+1} são iguais até a oitava casa decimal. (Um enunciado preciso a respeito da precisão do método de Newton será dado no Exercício 39 da Seção 11.11, no Volume II.)

Observe que o procedimento para ir de n para $n + 1$ é o mesmo para todos os valores de n. (Isso é chamado *processo iterativo*.) Isso significa que o método de Newton é particularmente adequado ao uso de calculadoras programáveis ou de um computador.

EXEMPLO 2 Use o método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ com precisão de oito casas decimais.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a determinar a raiz positiva da equação

$$x^6 - 2 = 0$$

dessa forma, tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Então $f'(x) = 6x^5$, e a Fórmula 2 (método de Newton) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Se escolhermos $x_1 = 1$ como a aproximação inicial, obtemos

$$x_2 \approx 1{,}16666667,$$

$$x_3 \approx 1{,}12644368,$$

$$x_4 \approx 1{,}12249707,$$

$$x_5 \approx 1{,}12246205,$$

$$x_6 \approx 1{,}12246205.$$

Uma vez que x_5 e x_6 são iguais até a oitava casa decimal, concluímos

$$\sqrt[6]{2} \approx 1{,}12246205$$

até a oitava casa decimal.

EXEMPLO 3 Encontre a raiz da equação $\cos x = x$, com precisão de seis casas decimais.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação na forma padrão:

$$\cos x - x = 0$$

Portanto, fazemos $f(x) = \cos x - x$. Então $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, e assim a Fórmula 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

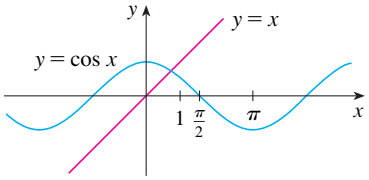


FIGURA 6

A fim de determinarmos um valor adequado para x_1, esboçamos o gráfico de $y = \cos x$ e $y = x$ na Figura 6. É evidente que elas se interceptam em um ponto cuja coordenada x é um pouco menor que 1; dessa forma, vamos tomar $x_1 = 1$ como uma primeira aproximação conveniente. Logo, lembrando de colocar nossa calculadora no modo radiano, obtemos

$$x_2 \approx 0{,}75036387,$$
$$x_3 \approx 0{,}73911289,$$
$$x_4 \approx 0{,}73908513,$$
$$x_5 \approx 0{,}73908513.$$

Como x_4 e x_5 são iguais até a sexta casa decimal (na realidade, oitava), concluímos que a raiz da equação, correta até a sexta casa decimal, é 0,739085.

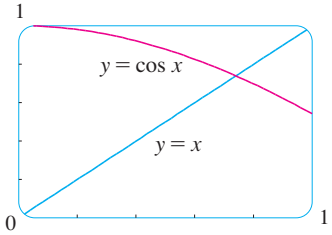


FIGURA 7

Em vez de usarmos o esboço da Figura 6 para obter a aproximação inicial para o método de Newton no Exemplo 3, poderíamos ter usado um gráfico mais apurado fornecido por calculadora ou computador. A Figura 7 sugere o uso de $x_1 = 0{,}75$ como a aproximação inicial. Então o método de Newton dá

$$x_2 \approx 0{,}73911114 \qquad x_3 \approx 0{,}73908513 \qquad x_4 \approx 0{,}73908513$$

e assim obtemos a mesma resposta anterior, mas com um número menor de passos.

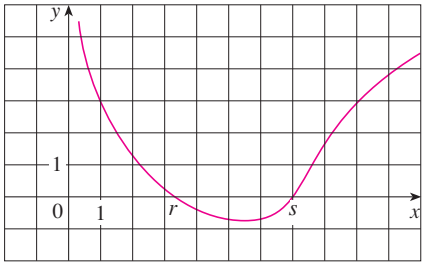
Você deve estar se perguntando por que nos preocupamos com o método de Newton se uma ferramenta gráfica está disponível. Não é mais fácil dar repetidos *zooms* para encontrar as raízes, como fizemos na Seção 1.4? Se somente for pedida uma precisão de uma ou duas casas decimais, então realmente o método de Newton é inadequado, e basta uma ferramenta gráfica. Mas se forem exigidas seis ou oito casas decimais, então repetidos *zooms* tornam-se entediantes. Em geral é mais rápido e mais eficiente usar o computador e o método de Newton em conjunto – a ferramenta gráfica para começar e o método de Newton para acabar.

4.8 Exercícios

1. A figura mostra o gráfico da função f. Suponha que seja usado o método de Newton para aproximar a raiz r da equação $f(x) = 0$ com $x_1 = 1$ como aproximação inicial.

(a) Desenhe as tangentes que são usadas para encontrar x_2 e x_3, e estime os valores numéricos de x_2 e x_3.

(b) Uma melhor aproximação seria $x_1 = 5$? Explique.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

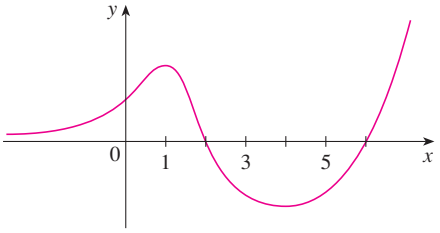
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. Siga as instruções do Exercício 1(a), mas use $x_1 = 9$ como a aproximação inicial para encontrar a raiz s.

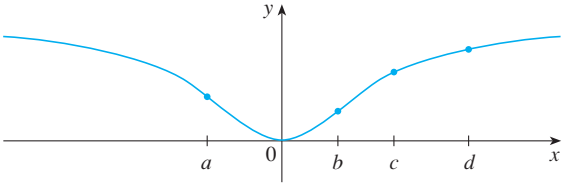
3. Suponha que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(2, 5)$ tenha a equação $y = 9 - 2x$. Se for usado o método de Newton para localizar uma raiz da equação $f(x) = 0$ com a aproximação inicial $x_1 = 2$, encontre a segunda aproximação x_2.

4. Para cada aproximação inicial, determine graficamente o que acontecerá se for usado o método de Newton para a função cujo gráfico é dado.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5. Para cada aproximação inicial $x_1 = a, b, c$ e d, você acha que o método de Newton funcionará e levará à raiz da equação $f(x) = 0$?



6–8 Use o método de Newton com o valor inicial especificado x_1 para encontrar x_3, a terceira aproximação da raiz da equação dada. (Dê sua resposta com quatro casas decimais.)

6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$ **8.** $x^7 + 4 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = -1$ para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^3 + x + 3 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente no ponto $(-1, 1)$. Usando este gráfico, explique como o método funciona neste caso.

10. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = 1$ para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^4 - x - 1 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente no ponto $(1, -1)$. Usando este gráfico, explique como o método funciona neste caso.

11–12 Use o método de Newton para aproximar o número dado com precisão de oito casas decimais.

11. $\sqrt[5]{20}$ **12.** $\sqrt[100]{100}$

13–16 Use o método de Newton para aproximar a raiz indicada da equação com precisão de seis casas decimais.

13. A raiz de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ no intervalo $[1, 2]$.

14. A raiz de $2{,}2x^5 - 4{,}4x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}9x - 4{,}0 = 0$ no intervalo $[-2, -1]$.

15. A raiz positiva de $\operatorname{sen} x = x^2$.

16. A raiz positiva de $2 \cos x = x^4$.

17–22 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação com precisão de seis casas decimais.

17. $3 \cos x = x + 1$ **18.** $\sqrt{x+1} = x^2 - x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$ **20.** $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $\cos x = \sqrt{x}$ **22.** $\operatorname{tg} x = \sqrt{1 - x^2}$

23–28 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação com precisão de oito casas decimais. Comece fazendo um gráfico para encontrar a aproximação inicial.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

24. $x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - x + 6 = 0$

25. $\dfrac{x}{x^2 + 1} = \sqrt{1 - x}$ **26.** $\cos(x^2 - x) = x^4$

27. $4e^{-x^2} \operatorname{sen} x = x^2 - x + 1$ **28.** $e^{\operatorname{arctg} x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. (a) Aplique o método de Newton à equação $x^2 - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para a raiz quadrada (usada pelos antigos babilônios para calcular $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\sqrt{1.000}$ com precisão de seis casas decimais.

30. (a) Aplique o método de Newton à equação $1/x - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para os inversos:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Esse algoritmo possibilita a um computador achar os inversos sem realmente dividir.)

(b) Use a parte (a) para calcular 1/1,6984 com precisão de seis casas decimais.

31. Explique por que o método de Newton não funciona para encontrar as raízes da equação $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_1 = 1$.

32. (a) Use o método de Newton com $x_1 = 1$ para encontrar a raiz da equação $x^3 - x = 1$ com precisão de seis casas decimais.

(b) Resolva a equação da parte (a) usando como aproximação inicial $x_1 = 0{,}6$.

(c) Resolva a equação da parte (a) utilizando $x_1 = 0{,}57$. (Você definitivamente precisa de uma calculadora programável para esta parte.)

(d) Faça o gráfico de $f(x) = x^3 - x - 1$ e suas retas tangentes em $x_1 = 1$, 0,6 e 0,57 para explicar por que o método de Newton é tão sensível ao valor da aproximação inicial.

33. Explique por que o método de Newton falha quando aplicado à equação $\sqrt[3]{x} = 0$ com qualquer valor inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre sua explicação com um esboço.

34. Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

então a raiz da equação $f(x) = 0$ é $x = 0$. Explique por que o método de Newton falha para encontrar a raiz, não importando que aproximação inicial $x_1 \neq 0$ é usada. Ilustre sua explicação com um esboço.

35. (a) Use o método de Newton para encontrar os números críticos da função $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ com precisão de três casas decimais.

(b) Encontre o valor mínimo absoluto de f com precisão de quatro casas decimais.

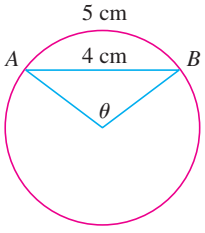
36. Use o método de Newton para encontrar o valor máximo absoluto da função $f(x) = x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, com precisão de seis casas decimais.

37. Use o método de Newton para encontrar as coordenadas do ponto de inflexão da curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, com precisão de seis casas decimais.

38. Dentre as infinitas retas tangentes à curva $y = -\operatorname{sen} x$ que passam pela origem, existe uma que tem a maior inclinação. Use o método de Newton para encontrar a inclinação desta reta com precisão de seis casas decimais.

39. Use o método de Newton para encontrar as coordenadas, com precisão de seis casas decimais, do ponto na parábola $y = (x - 1)^2$ que esteja mais próximo da origem.

40. Nesta figura, o comprimento da corda AB é 4 cm e o comprimento do arco AB é 5 cm. Encontre o ângulo central θ, em radianos, correto até a quarta casa decimal. Dê então a resposta com precisão de um grau.



41. Um agente vende um carro novo por $18.000. Ele também oferece para vender o mesmo carro em pagamentos de $ 375 por mês durante 5 anos. Qual a taxa de juro mensal cobrada pelo vendedor?

Para resolver esse problema você necessitará da fórmula para o valor presente A de uma anuidade formada por n pagamentos iguais de tamanho R com uma taxa de juros i por período de tempo:

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

Substituindo i por x, mostre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Use o método de Newton para resolver essa equação.

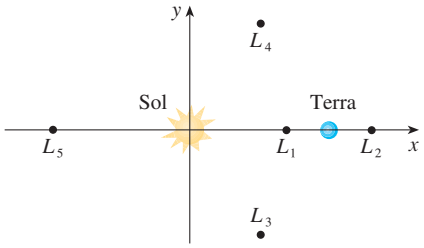
42. A figura mostra o Sol na origem e a Terra no ponto (1,0). (A unidade aqui é a distância entre os centros da Terra e do Sol, chamada *unidade astronômica*: 1 AU $\approx 1{,}496 \times 10^8$ km.) Existem cinco localizações L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 nesse plano de rotação da Terra em torno do Sol onde um satélite permanece imóvel em relação à Terra, em razão de as forças que agem no satélite (inclusive a atração gravitacional da Terra e do Sol) se contrabalancearem. Essas localizações são denominadas *pontos de libração*. (Um satélite de pesquisa solar foi colocado em um desses pontos de libração.) Se m_1 é a massa do Sol, m_2 é a massa da Terra, e $r = m_2/(m_1 + m_2)$, então a coordenada x de L_1 é a única raiz da equação de quinto grau

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

e a coordenada x de L_2 é a raiz da equação

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Usando o valor $r \approx 3{,}04042 \times 10^{-6}$, encontre a localização dos pontos de libração (a) L_1 e (b) L_2.



4.9 Primitivas

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante certo período. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em certo momento futuro. Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada *primitiva* de f.

Definição Uma função F é denominada uma **primitiva** de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$. Não é difícil descobrir uma primitiva de f se tivermos em mente a Regra da Potência. De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, logo $F'(x) = x^2 = f(x)$. Mas a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$. Portanto, F e G são primitivas de f. De fato, qualquer função da forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, onde C é uma constante, é uma primitiva de f. A questão surge: há outras?

Para responder a essa questão, lembre-se de que na Seção 4.2 usamos o Teorema do Valor Médio para demonstrar que se duas funções têm derivadas idênticas em um intervalo, en-

tão elas devem diferir por uma constante (Corolário 4.2.7). Assim, se F e G são duas primitivas quaisquer de f, então

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

logo, $G(x) - F(x) = C$, em que C é uma constante. Podemos escrever isso como $G(x) = F(x) + C$. Temos então o seguinte resultado.

1 Teorema Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que a primitiva geral de f é $\frac{1}{3}x^3 + C$. Atribuindo valores específicos para a constante C, obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais uns dos outros (veja a Figura 1). Isso faz sentido, pois cada curva deve ter a mesma inclinação em qualquer valor dado de x.

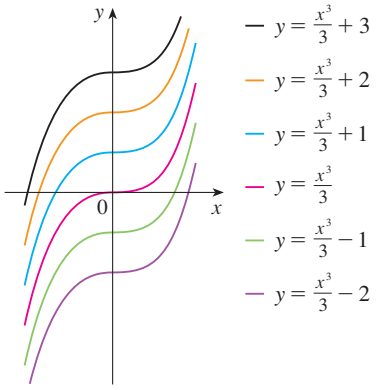


FIGURA 1
Membros da família de primitivas de $f(x) = x^2$

EXEMPLO 1 Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUÇÃO

(a) Se $F(x) = -\cos x$, então $F'(x) = \operatorname{sen} x$, logo uma primitiva de sen x é $-\cos x$. Pelo Teorema 1, a primitiva mais geral é $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Lembre-se, da Seção 3.6, de que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Logo, no intervalo $(0, \infty)$, a primitiva geral de $1/x$ é $\ln x + C$. Também sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. O Teorema 1 então nos diz que a primitiva geral de $f(x) = 1/x$ é $\ln |x| + C$ em qualquer intervalo que não contenha 0. Em particular, isso é verdadeiro em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Logo, a primitiva geral de f é

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usamos a Regra da Potência para descobrir uma primitiva de x^n. De fato, se $n \neq -1$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Logo, a primitiva geral de $f(x) = x^n$ é

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Isso é válido para todo $n \geqslant 0$, uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em um intervalo. Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha 0.

Como no Exemplo 1, toda fórmula de derivação, quando lida da direita para a esquerda, dá origem a uma fórmula de primitivação. Na Tabela 2 listamos algumas primitivas particulares. Cada fórmula na tabela é verdadeira, pois a derivada da função na coluna direita aparece na coluna esquerda. Em particular, a primeira fórmula diz que a primitiva de uma constante vezes uma função é a constante vezes a primitiva da função. A segunda fórmula afirma que a primitiva de uma soma é a soma das primitivas. (Usamos a notação $F' = f$, $G' = g$.)

2 Tabela de Fórmulas de Primitivação

Para obtermos a primitiva mais geral (em um intervalo) a partir daquelas da Tabela 2, devemos adicionar uma constante (ou constantes), como no Exemplo 1.

Função	Primitiva particular	Função	Primitiva particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{tg}^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$		

EXEMPLO 2 Encontre todas as funções g tais que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUÇÃO Queremos achar uma primitiva de:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, queremos descobrir a primitiva de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Usando as fórmulas da Tabela 2 junto com o Teorema 1, obtemos

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5} x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

A Figura 2 ilustra os gráficos da função f' do Exemplo 3 e sua primitiva f. Note que $f'(x) > 0$, então f é sempre crescente. Observe também que quando f' tem um máximo ou mínimo, f parece ter um ponto de inflexão. Logo, o gráfico serve como verificação de nossos cálculos.

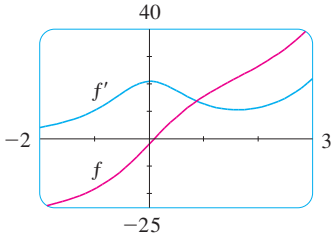


FIGURA 2

Nas aplicações do cálculo são muito comuns situações como a do Exemplo 2, em que é pedido para encontrar uma função sendo fornecidos dados sobre suas derivadas. Uma equação que envolva as derivadas de uma função é chamada **equação diferencial**. As equações diferenciais serão estudadas com mais detalhes no Capítulo 9, no Volume II, mas no momento podemos resolver algumas equações diferenciais elementares. A solução geral de uma equação diferencial envolve uma constante arbitrária (ou constantes), como no Exemplo 2. Contudo, podem ser dadas condições extras que vão determinar as constantes e assim especificar univocamente a solução.

EXEMPLO 3 Encontre f se $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ e $f(0) = -2$.

SOLUÇÃO A primitiva geral de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

Para determinarmos C, usamos o fato de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \operatorname{tg}^{-1} 0 + C = -2$$

Assim, temos $C = -2 - 1 = -3$; logo, a solução particular é

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{tg}^{-1} x - 3$$

EXEMPLO 4 Encontre f se $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$.

SOLUÇÃO A primitiva geral de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ é

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Usando as regras de primitivação mais uma vez, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinarmos C e D, usamos as condições dadas $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$. Visto que $f(0) = 0 + D = 4$, temos $D = 4$. Uma vez que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

temos $C = -3$. Consequentemente, a função pedida é

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Se nos for dado o gráfico de uma função f, parece razoável que possamos esboçar o gráfico de uma primitiva F. Suponha, por exemplo, que nos seja dado que $F(0) = 1$. Então temos um ponto de partida $(0, 1)$, e a direção segundo a qual movemos nosso lápis é dada em cada estágio pela derivada $F'(x) = f(x)$. No próximo exemplo, usamos os princípios deste capítulo para mostrar como fazer o gráfico de F mesmo quando não temos uma fórmula para f. Esse seria o caso, por exemplo, quando $f(x)$ é determinada por dados experimentais.

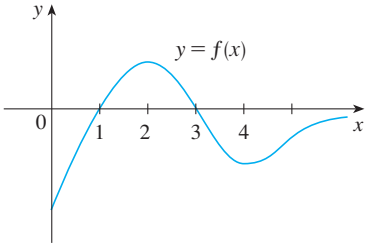


FIGURA 3

EXEMPLO 5 O gráfico de uma função f é dado na Figura 3. Faça um esboço de uma primitiva F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUÇÃO Estamos orientados pelo fato de que a inclinação de $y = F(x)$ é $f(x)$. Vamos começar no ponto $(0, 2)$, traçando F como uma função inicialmente decrescente, uma vez que $f(x)$, é negativa quando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, logo, F tem tangentes horizontais quando $x = 1$ e $x = 3$. Para $1 < x < 3$, $f(x)$ é positiva e F é crescente. Vemos que F tem mínimo local quando $x = 1$ e máximo local quando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ é negativa e F é decrescente em $(3, \infty)$. Uma vez que $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, o gráfico de F torna-se mais achatado quando $x \to \infty$. Observe também que $F''(x) = f'(x)$ muda de positiva para negativa em $x = 2$ e de negativa para positiva em $x = 4$, logo F tem pontos de inflexão quando $x = 2$ e $x = 4$. Usamos essa informação para esboçar o gráfico para a primitiva na Figura 4.

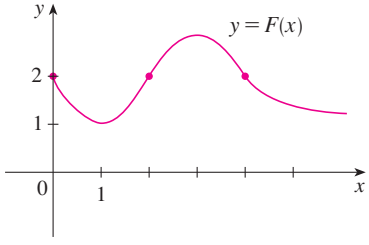


FIGURA 4

Movimento Retilíneo

A primitivação é particularmente útil na análise do movimento de um objeto que se move em uma reta. Lembre-se de que se o objeto tem função posição $s = f(t)$, então a função velocidade é $v(t) = s'(t)$. Isso significa que a função posição é uma primitiva da função velocidade. Da mesma maneira, a função aceleração é $a(t) = v'(t)$; logo, a função velocidade é uma primitiva da aceleração. Se a aceleração e os valores iniciais $s(0)$ e $v(0)$ forem conhecidos, então a função posição pode ser determinada encontrando primitivas duas vezes.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se em uma reta e tem aceleração dada por $a(t) = 6t + 4$. Sua velocidade inicial é $v(0) = -6$ cm/s, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9$ cm. Encontre sua função posição $s(t)$.

SOLUÇÃO Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, a primitivação dá

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Mas nos é dado que $v(0) = -6$, assim $C = -6$ e

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Uma vez que $v(t) = s'(t)$, s é a primitiva de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Isso dá $s(0) = D$. Temos $s(0) = 9$, logo $D = 9$ e a função posição pedida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

Um objeto próximo da superfície da Terra é sujeito à força gravitacional, que produz uma aceleração para baixo denotada por g. Para movimentos próximos ao solo, podemos assumir que g é uma constante, e seu valor é cerca de 9,8 m/s² (ou 32 pés/s²).

EXEMPLO 7 Uma bola é arremessada para cima com uma velocidade de 15 m/s a partir da borda de um penhasco 140 m acima do solo. Encontre sua altura acima do solo t segundos mais tarde. Quando ela atinge sua altura máxima? Quando atinge o solo?

SOLUÇÃO O movimento é vertical, e escolhemos o sentido positivo para cima. No instante t, a distância acima do solo é $s(t)$ e a velocidade $v(t)$ está decrescendo. Portanto, a aceleração deve ser negativa, e temos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9{,}8$$

Procurando a primitiva, temos

$$v(t) = -9{,}8t + C$$

Para determinarmos C, usamos a informação dada que $v(0) = 15$. Isso dá $15 = 0 + C$, logo

$$v(t) = -9{,}8t + 15$$

A altura máxima é atingida quando $v(t) = 0$, isto é, depois de $15/9{,}8 \approx 1{,}53$ s. Uma vez que $s'(t) = v(t)$, determinamos a primitiva outra vez e obtemos

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 15t + D$$

Usando o fato de que $s(0) = 140$, temos $140 = 0 + D$ e então

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 15t + 140$$

A expressão para $s(t)$ é válida até que a bola atinja o solo. Isso acontece quando $s(t) = 0$, isto é, quando

$$-4{,}9t^2 - 15t - 140 = 0$$

Usando a fórmula quadrática para resolver essa equação, obtemos

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{2\,969}}{9{,}8}$$

Rejeitamos a solução com o sinal de menos, uma vez que ela fornece um valor negativo para t. Portanto, a bola atinge o solo após

$$\frac{15 + \sqrt{2\,969}}{9{,}8} \approx 7{,}1 \text{ s}$$

A Figura 5 mostra a função posição. O gráfico confirma nossas conclusões: a bola atinge a altura máxima depois 1,5 s e atinge o solo depois de 7,1 s.

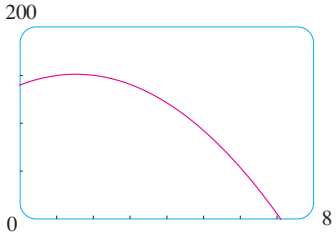


FIGURA 5

4.9 Exercícios

1–22 Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções. (Verifique sua resposta derivando.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$

8. $f(x) = x^{3,4} - 2x^{\sqrt{2}-1}$

9. $f(x) = \sqrt{2}$

10. $f(x) = e^2$

11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x}$

14. $f(t) = \dfrac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$

15. $g(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$

16. $r(\theta) = \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta - 2e^{\theta}$

17. $h(\theta) = 2\operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta$

18. $f(t) = \operatorname{sen} t + 2\operatorname{senh} t$

19. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

20. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

21. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

22. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

23–24 Encontre a primitiva F de f que satisfaça a condição dada. Verifique sua resposta comparando os gráficos de f e F.

23. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

24. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

25–48 Encontre f.

25. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

26. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$

27. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

28. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$

29. $f'''(t) = \cos t$

30. $f'''(t) = e^t + t^{-4}$

31. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}, \quad f(4) = 25$

32. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$

33. $f'(t) = 4/(1 + t^2), \quad f(1) = 0$

34. $f'(t) = t + 1/t^3, \quad t > 0, \quad f(1) = 6$

35. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

36. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

37. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

38. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

39. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$

40. $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$

41. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

42. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

43. $f''(x) = 4 + 6x + 24x^2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 10$

44. $f''(x) = x^3 + \operatorname{senh} x, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2{,}6$

45. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

46. $f''(t) = 2e^t + 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

47. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

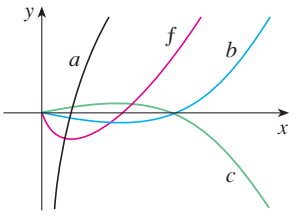
48. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

49. Dado que o gráfico de f passa pelo ponto $(1, 6)$ e que a inclinação de sua reta tangente em $(x, f(x))$ é $2x + 1$, encontre $f(2)$.

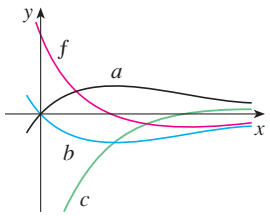
50. Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e tal que a reta $x + y = 0$ seja tangente ao gráfico de f.

51–52 O gráfico de uma função f está mostrado. Qual gráfico é uma primitiva de f e por quê?

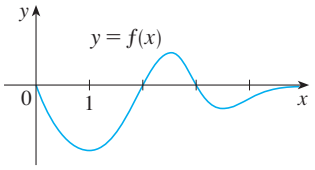
51.



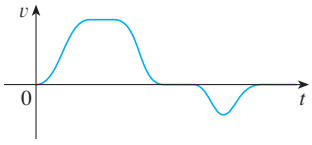
52.



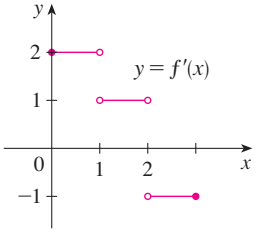
53. O gráfico de uma função está mostrado na figura. Faça um esboço de uma primitiva de F, dado que $F(0) = 1$.



54. O gráfico da função velocidade de um carro está mostrado na figura. Esboce o gráfico da função posição.



55. O gráfico de uma função f' está mostrado na figura. Esboce um gráfico de f se f for contínua e $f(0) = -1$.



56. (a) Use uma ferramenta gráfica para construir o gráfico de $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) Começando com o gráfico da parte (a), esboce um gráfico da primitiva F que satisfaça $F(0) = 1$.
(c) Use as regras desta seção para achar uma expressão para $F(x)$.
(d) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (c). Compare com seu esboço da parte (b).

57–58 Trace um gráfico de f e use-o para fazer um esboço da primitiva que passe pela origem.

57. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

58. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leq x \leq 3$

59–64 Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

59. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = 1{,}5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

61. $a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

62. $a(t) = 3\cos t - 2\operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

63. $a(t) = 10\operatorname{sen} t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

65. Uma pedra é largada de um posto de observação da Torre CN, 450 m acima do solo.
(a) Determine a distância da pedra acima do nível do solo no instante t.
(b) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo?
(c) Com que velocidade ela atinge o solo?
(d) Se a pedra for atirada para baixo com uma velocidade de 5 m/s, quanto tempo levará para que atinja o solo?

66. Mostre que, para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento depois de um tempo t é

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

67. Um objeto é lançado para cima com velocidade inicial v_0 metros por segundo a partir de um ponto s_0 metros acima do solo. Mostre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0]$$

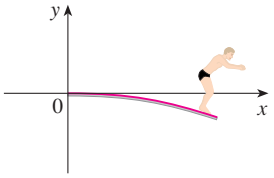
68. Duas bolas são arremessadas para cima à margem do penhasco no Exemplo 7. A primeira é arremessada com uma velocidade de 15 m/s, e a outra é arremessada 1 segundo depois, com uma velocidade de 8 m/s. As bolas passam uma pela outra alguma vez?

69. Uma pedra é largada de um penhasco e atinge o solo com uma velocidade de 40 m/s. Qual a altura do penhasco?

70. Se um mergulhador de massa m permanece na ponta de um trampolim de comprimento L e densidade linear ρ, o trampolim toma a forma da curva $y = f(x)$, em que

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I são constantes positivas que dependem do material do trampolim e g (< 0) é a aceleração da gravidade.
(a) Encontre uma expressão para a forma da curva.
(b) Use $f(L)$ para estimar a distância da horizontal à ponta do trampolim.



71. Uma companhia estima que o custo marginal (em dólares por item) de produzir x itens é $1{,}92 - 0{,}002x$. Se o custo de produzir um item for \$ 562, encontre o custo de produzir 100 itens.

72. A densidade linear de um cabo de comprimento de 1 m é dado por $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, em gramas por centímetro, onde x é medido em centímetros a partir da extremidade do cabo. Encontre a massa do cabo.

73. Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a = \begin{cases} 9 - 0{,}9t & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair?

74. Um carro está viajando a 80 km/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 7 m/s^2. Qual a distância percorrida antes de o carro parar?

75. Qual a aceleração necessária para aumentar a velocidade de um carro a 50 km/h para 80 km/h em 5 s?

76. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 5m/s^2, produzindo marcas de frenagem medindo 60 m antes de parar completamente. Quão rápido estava o carro viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

77. Um carro está viajando a 100 km/h quando o motorista vê um acidente 80 m adiante e pisa no freio. Qual desaceleração constante é necessária para parar o carro em tempo de evitar a batida?

78. Um modelo de foguete é lançado para cima a partir do repouso. Sua aceleração para os três primeiros segundos é $a(t) = 18t$, e nesse ínterim o combustível acaba, e ele se transforma em um corpo em queda livre. Após 14 s o paraquedas do foguete se abre, e a velocidade (para baixo) diminui linearmente para $-5{,}5$ m/s em 5 segundos. O foguete então cai até o solo naquela taxa.
(a) Determine a função posição s e a função velocidade v (para todo instante t). Esboce os gráficos de s e v.
(b) Em que instante o foguete atingiu sua altura máxima e qual é essa altura?
(c) Em que instante o foguete atinge a terra?

79. Um trem-bala de alta velocidade acelera e desacelera a uma taxa de 1,2 m/s^2. Sua velocidade máxima é de 145 km/h.
(a) Qual será a distância máxima percorrida pelo trem se ele acelerar a partir do repouso até atingir a velocidade de cruzeiro e permanecer nessa velocidade por 15 minutos?
(b) Suponha que o trem comece a partir do repouso e então pare completamente em 15 minutos. Que distância máxima ele poderá percorrer nessas condições?
(c) Encontre o tempo mínimo para o trem viajar entre duas estações consecutivas, distantes 72 km uma da outra.
(d) A viagem de uma estação para outra leva 37,5 minutos. Qual a distância entre as estações?

4 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Explique a diferença entre um máximo absoluto e um máximo local. Ilustre com um esboço.
2. (a) O que diz o Teorema do Valores Extremos?
   (b) Explique o funcionamento do Método do Intervalo Fechado.
3. (a) Enuncie o Teorema de Fermat.
   (b) Defina um número crítico de f.
4. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.
   (b) Enuncie o Teorema do Valor Médio e dê uma interpretação geométrica.
5. (a) Enuncie o Teste Crescente/Decrescente.
   (b) O que significa dizer que f é côncava para cima em I?
   (c) Enuncie o Teste da Concavidade.
   (d) O que são pontos de inflexão? Como são encontrados?
6. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
   (b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada.
   (c) Quais as vantagens e desvantagens relativas desses testes?
7. (a) O que nos diz a Regra de l'Hôspital?
   (b) Como você pode usar a Regra de l'Hôspital se tiver um produto $f(x)\,g(x)$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (c) Como você pode usar a Regra de l'Hôspital se tiver uma diferença $f(x) - g(x)$ onde $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (d) Como você pode usar a Regra de l'Hôspital se tiver uma potência $[f(x)]^{g(x)}$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$?
8. Se você pode usar uma calculadora gráfica ou computador, para que precisa do cálculo para fazer o gráfico da função?
9. (a) Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação $f(x) = 0$, explique geometricamente, com um diagrama, como a segunda aproximação x_2 no método de Newton é obtida.
   (b) Escreva uma expressão para x_2 em termos de x_1, $f(x_1)$ e $f'(x_1)$.
   (c) Escreva uma expressão para x_{n+1} em termos de x_n, $f(x_n)$ e $f'(x_n)$.
   (d) Sob quais circunstâncias o método de Newton provavelmente falhará ou funcionará muito vagarosamente?
10. (a) O que é uma primitiva de uma função f?
    (b) Suponha que F_1 e F_2 sejam ambas primitivas de f em um intervalo I. Como estão relacionadas F_1 e F_2?

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo local em c.
2. Se f tiver um valor mínimo absoluto em c, então $f'(c) = 0$.
3. Se f for contínua em (a, b), então f atinge um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em (a, b).
4. Se f for derivável e $f(-1) = f(1)$, então há um número c como $|c| < 1$ e $f'(c) = 0$.
5. Se $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, então f é decrescente em $(1, 6)$.
6. Se $f''(2) = 0$, então $(2, f(2))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$.
7. Se $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.
8. Existe uma função f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e $f'(x) > 1$ para todo x.
9. Existe uma função f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.
10. Existe uma função f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.
11. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f + g$ é crescente em I.
12. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f - g$ é crescente em I.
13. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então fg é crescente em I.
14. Se f e g forem positivas em um intervalo I, então fg é crescente em I.
15. Se f for crescente e $f(x) > 0$ em I, então $g(x) = 1/f(x)$ é decrescente em I.
16. Se f é par, então f' é par.
17. Se f for periódica, então f' será periódica.
18. A primitiva mais geral de $f(x) = x^{-2}$ é
$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$
19. Se $f'(x)$ existe e não é nula para nenhum x, então $f(1) \neq f(0)$.
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x} = 1$.

Exercícios

1–6 Encontre os valores extremos absolutos e locais da função no intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$
2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$
3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad [-2, 1]$
5. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$
6. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [-1, 3]$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador — SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

7–14 Calcule o limite.

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x}$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x + \operatorname{sen} 2x}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim_{x\to -\infty} (x^2 - x^3)e^{2x}$

12. $\lim_{x\to \pi^-} (x - \pi)\operatorname{cossec} x$

13. $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

14. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

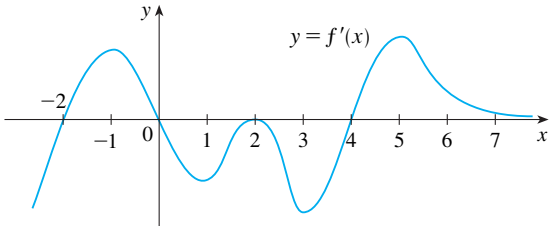
15–17. Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $f(0) = 0$, $f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 6} f(x) = -\infty$,
$f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2)$, $(1, 6)$ e $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ em $(-2, 1)$ e $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ em $(0, 6)$ e $(6, 12)$

16. $f(0) = 0$, f é contínua e par,
$f'(x) = 2x$ se $0 < x < 1$, $f'(x) = -1$ se $1 < x < 3$,
$f'(x) = 1$ se $x > 3$

17. f é ímpar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$,
$f'(x) > 0$ para $x > 2$, $f''(x) > 0$ para $0 < x < 3$,
$f''(x) < 0$ para $x > 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

18. A figura mostra o gráfico da *derivada* f' de uma função f.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Esboce o gráfico de f''.
(d) Esboce um possível gráfico de f.



19–34 Use o roteiro da Seção 4.5 para esboçar a curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x-3)^2}$

24. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = e^x \operatorname{sen} x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

30. $y = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = (x - 2)e^{-x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Faça os gráficos de f que revelem todos os aspectos da curva. Use os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e de decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão. No Exercício 35, use o cálculo para achar exatamente essas quantidades.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6{,}5 \operatorname{sen} x$, $-5 \leq x \leq 5$

39. Faça o gráfico de $f(x) = e^{-1/x^2}$ em uma janela retangular que mostre todos os principais aspectos dessa função. Estime os pontos de inflexão. A seguir, use o cálculo para achá-los exatamente.

SCA **40.** (a) Faça o gráfico de função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique o formato do gráfico calculando os limites $f(x)$ quando x tende a ∞, $-\infty$, 0^+ e 0^-.
(c) Use o gráfico de f para estimar as coordenadas dos pontos de inflexão.
(d) Use seu SCA para calcular e formar o gráfico de f''.
(e) Use o gráfico (d) para estimar os pontos de inflexão de forma mais precisa.

SCA **41–42** Use os gráficos de f, f' e f'' para estimar a coordenada x dos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $-\pi \leq x \leq \pi$

42. $f(x) = e^{-0{,}1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue a família de funções $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. Que aspectos os membros dessa família têm em comum? Como eles diferem? Para quais valores de C a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$? Para quais valores de C a função f não tem gráfico? O que acontece se $C \to \infty$?

44. Investigue a família de funções $f(x) = cxe^{-cx^2}$. O que acontece com os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão quando c varia? Ilustre suas conclusões fazendo o gráfico de vários membros da família.

45. Mostre que a equação $3x + 2\cos x + 5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

46. Suponha que f seja contínua em $[0, 4]$, $f(0) = 1$ e $2 \leq f'(x) \leq 5$ para todo x em $(0, 4)$. Mostre que $9 \leq f(4) \leq 21$.

47. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^{1/5}$ no intervalo $[32, 33]$, mostre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2{,}0125$$

48. Para que valores das constantes a e b, $(1, 3)$ é um ponto de inflexão da curva $y = ax^3 + bx^2$?

49. Seja $g(x) = f(x^2)$, onde f é duas vezes derivável para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.
(a) Em que números g tem um valor extremo?
(b) Discuta a concavidade de g.

50. Encontre dois inteiros positivos tal que a soma do primeiro número com quatro vezes o segundo número é 1.000, e o produto dos números é o maior possível.

51. Mostre que a menor distância do ponto (x_1, y_1) a uma reta $Ax + By + C = 0$ é

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encontre o ponto sobre a hipérbole $xy = 8$ que está mais próximo ao ponto $(3, 0)$.

53. Encontre a menor área possível de um triângulo isósceles que está circunscrito em um círculo de raio r.

54. Encontre o volume do maior cone circular que pode ser inscrito em uma esfera de raio r.

55. Em ΔABC, D está em AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm e $|CD| = 5$ cm. Onde estaria o ponto P escolhido em CD para a soma $|PA| + |PB| + |PC|$ ser mínima?

56. Faça o Exercício 55 quando $|CD| = 2$ cm.

57. A velocidade de uma onda de comprimento L em água profunda é

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

onde K e C são constantes positivas conhecidas. Qual é o comprimento da onda que dá a velocidade mínima?

58. Um tanque de armazenamento de metal com volume V deve ser construído com a forma de um cilindro circular reto com um hemisfério em cima. Quais as dimensões que vão exigir a menor quantidade de metal?

59. Uma arena de esportes tem capacidade para 15 mil espectadores sentados. Com o preço do ingresso a \$ 12, a média de público tem sido de 11 mil espectadores. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada dólar que o preço do ingresso é diminuído, a média de público aumenta em 1.000. Como os donos do time devem definir o preço do bilhete para maximizar seus lucros com as vendas de ingressos?

60. Um fabricante determinou que o custo de fazer x unidades de uma mercadoria é $C(x) = 1.800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$ e a função demanda é $p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x$.

(a) Faça o gráfico das funções custo e receita e use os gráficos para estimar o nível de produção para o lucro máximo.

(b) Use o cálculo para achar o nível de produção para o lucro máximo.

(c) Estime o nível de produção que minimize o custo médio.

61. Use o método de Newton para achar a raiz da equação $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ com precisão de seis casas decimais.

62. Use o método de Newton para achar todas as raízes da equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ com precisão de seis casas decimais.

63. Use o método de Newton para achar o máximo absoluto da função $f(t) = \cos t + t - t^2$ com precisão de oito casas decimais.

64. Use o roteiro na Seção 4.5 para esboçar o gráfico da curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Use o método de Newton quando for necessário.

65–72 Encontre f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \operatorname{tg} x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2 \cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73–74 Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

75. (a) Se $f(x) = 0{,}1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leq x \leq 4$, use um gráfico de f para esboçar um gráfico da primitiva F de f que satisfaça $F(0) = 0$.

(b) Encontre uma expressão para $F(x)$.

(c) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (b). Compare com seu esboço da parte (a).

76. Investigue a família de curvas dada por

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

Em particular, você deve determinar o valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos varia e o valor de transição no qual o número de pontos de inflexão varia. Ilustre as várias possíveis formas com gráficos.

77. Uma caixa é lançada de um helicóptero a 500 m acima do chão. Seu paraquedas não abre, mas ela foi planejada para suportar uma velocidade de impacto de 100 m/s. Ela suportará o impacto ou não?

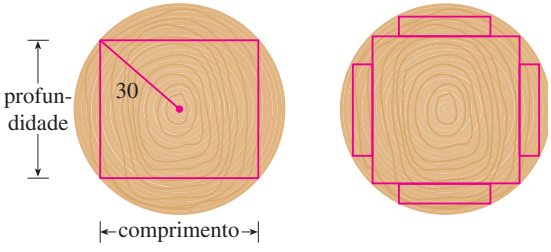
78. Em uma corrida automobilística ao longo de uma estrada reta, o carro A passou o carro B duas vezes. Demonstre que em algum instante durante a corrida suas acelerações eram iguais. Diga quais são as suas hipóteses.

79. Uma viga retangular será cortada de uma tora de madeira com raio de 30 cm.

(a) Mostre que a viga com área da seção transversal máxima é quadrada.

(b) Quatro pranchas retangulares serão cortadas de cada uma das quatro seções da tora que restarão após o corte da viga quadrada. Determine as dimensões das pranchas que terão área da seção transversal máxima.

(c) Suponha que a resistência de uma viga retangular seja proporcional ao produto de sua largura e o quadrado de sua profundidade. Encontre as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de uma tora cilíndrica.



80. Se um projétil for disparado com uma velocidade inicial v em um ângulo de inclinação θ a partir da horizontal, então sua trajetória, desprezando a resistência do ar, é uma parábola

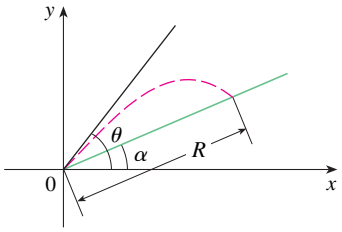
$$y = (\operatorname{tg}\theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta}x^2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponha que o projétil seja disparado da base de um plano que está inclinado em um ângulo α, $\alpha > 0$, a partir da horizontal, como mostrado na figura. Mostre que o alcance do projétil, medido no plano inclinado, é dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos\theta \ \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ tal que R seja máximo.

(c) Suponha que o plano esteja em um ângulo α *abaixo* da horizontal. Determine o alcance R e o ângulo segundo o qual o projétil deve ser disparado para maximizar R.



81. Mostre que para $x > 0$, temos

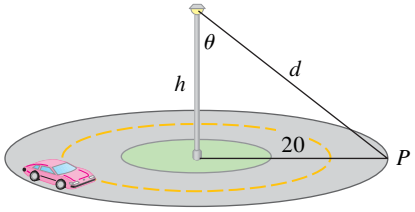
$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{tg}^{-1} x < x$$

82. Esboce o gráfico de uma função f tal que $f'(x) < 0$ para todo x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

83. Uma lâmpada será colocada no topo de um poste de altura h metros para iluminar um círculo de tráfego intenso com raio de 20 m. A intensidade de iluminação I para qualquer ponto P no círculo é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo θ (veja a figura) e inversamente proporcional ao quadrado da distância d da fonte.

(a) Qual a altura do poste para maximizar I?

(b) Suponha que o poste de luz tenha h metros e que uma mulher esteja se afastando da base do poste com velocidade de 1 m/s. A que taxa a intensidade da luz no ponto nas costas dela a 1 m acima do solo diminui quando ela alcança a borda externa do círculo?



84. Água está fluindo a uma taxa constante num tanque esférico. Sejam $V(t)$ o volume de água no tanque e $H(t)$ a altura da água no tanque num dado momento t.

(a) Quais são os valores de $V'(t)$ e $H'(t)$? Essas derivadas são positivas, negativas ou nulas?

(b) $V''(t)$ é positiva, negativa ou nula? Explique.

(c) Seja t_1, t_2, e t_3 o número de vezes que o tanque ficou um quarto cheio, metade cheio e três quartos cheio respectivamente. Os valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ e $H''(t_3)$ são positivos, negativos ou nulos? Por quê?

Problemas Quentes

Um dos mais importantes princípios de resolução de problemas é a *analogia*. Se você está tendo dificuldades em começar a lidar com um problema, é algumas vezes útil começar resolvendo um similar, porém mais simples. O problema a seguir ilustra o princípio. Cubra completamente a solução e tente resolvê-lo primeiro, você mesmo.

EXEMPLO 1 Se x, y e z são número positivos, prove que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUÇÃO O começo deste problema pode ser difícil. (Muitos estudantes o atacaram efetuando a multiplicação no numerador, mas isso somente cria uma confusão.) Vamos tentar pensar em problema similar que seja mais simples. Quando diversas variáveis estão envolvidas, é frequentemente útil pensar em um problema análogo com menos variáveis. No caso presente podemos reduzir o número de variáveis de três para um e demonstrar a desigualdade análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2, \qquad \text{para todo } x > 0$$

De fato, se formos capazes de demonstrar $\boxed{1}$, então segue a desigualdade desejada, pois

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

A chave para demonstrar 1 está em reconhecer que é uma versão disfarçada de um problema de mínimo. Se agora considerarmos

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

então $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de modo que $f'(x) = 0$ quando $x = 1$. Também, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Consequentemente, o valor mínimo absoluto de f é $f(1) = 2$. Isso significa que

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todo valor positivo de } x$$

e, como anteriormente mencionado, a desigualdade dada segue pela multiplicação.

A desigualdade em 1 pode também ser demonstrada sem cálculo. De fato, se $x > 1$, temos

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 1)^2 \geqslant 0$$

Como a última desigualdade é obviamente verdadeira, a primeira também o é.

SP REVENDO

O que você aprendeu da solução desse exemplo?

- Para resolver um problema envolvendo diversas variáveis, pode ser útil resolver um problema análogo com somente uma variável.
- Quando tentar demonstrar uma desigualdade, pode ajudar pensá-la como um problema de máximo ou de mínimo.

Problemas

1. Se um retângulo tiver sua base no eixo x e dois vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$, mostre que o retângulo tem a maior área possível quando os dois vértices estiverem nos pontos de inflexão da curva.
2. Mostre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.
3. A função $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ tem um máximo absoluto? Se sim, encontre-o. E um mínimo absoluto?
4. Mostre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos os valores positivos de x e y tais que $|x| \leqslant 2$ e $|y| \leqslant 2$.
5. Mostre que os pontos de inflexão da curva $y = (\operatorname{sen} x)/x$ estão sobre a curva $y^2(x^4 + 4) = 4$.
6. Encontre o ponto sobre a parábola $y = 1 - x^2$ no qual a reta tangente corta do primeiro quadrante o triângulo com a menor área.
7. Se a, b, c e d são constantes, tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

encontre o valor da soma $a + b + c + d$.

8. Esboce o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $|x + y| \leqslant e^x$.
9. Encontre o ponto mais alto e o mais baixo sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.
10. Para quais valores de c a curva $y = cx^3 + e^x$ tem pontos de inflexão?
11. Se $P(a, a^2)$ for qualquer ponto na parábola $y = x^2$, exceto a origem, seja Q o ponto em que a reta normal intercepta a parábola novamente (veja a figura). Mostre que o segmento de reta PQ tem o comprimento mais curto possível quando $a = 1/\sqrt{2}$.

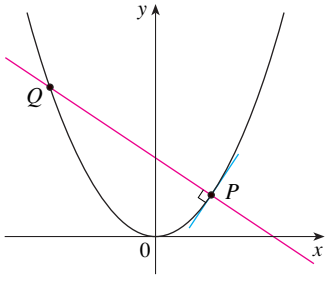
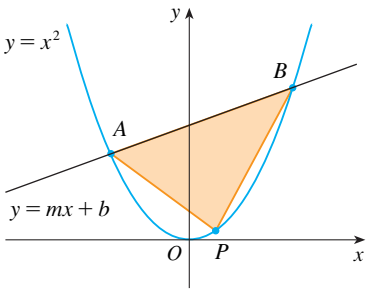


FIGURA PARA O PROBLEMA 11

12. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tais que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

13. A reta $y = mx + b$ intercepta a parábola $y = x^2$ nos pontos A e B (veja a figura). Encontre o ponto P sobre o arco AOB da parábola que maximize a área do triângulo PAB.



14. *ABCD* é um pedaço de papel quadrado de lado 1 m. Um quarto de círculo é traçado de *B* a *D* com centro em *A*. O papel é dobrado ao longo de *EF*, com *E* em *AB* e *F* em *AD*, de modo que *A* caia sobre a quarto de círculo. Determine a área máxima e a mínima que o triângulo *AEF* pode ter.

15. Para quais números positivos a a curva $y = a^x$ intercepta a reta $y = x$?

16. Para quais valores de a a equação a seguir é válida?

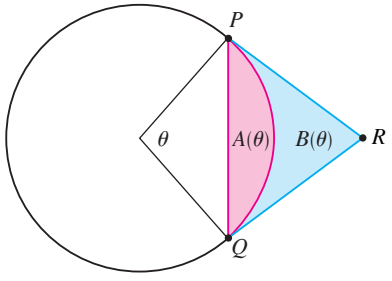
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e$$

17. Seja $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e n é um inteiro positivo. Se for dado que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para todo x, mostre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

18. Um arco de círculo *PQ* subtende um ângulo central θ como na figura. Seja $A(\theta)$ a área entre a corda *PQ* e o arco *PQ*. Seja $B(\theta)$ a área entre as retas tangentes *PR*, *QR* e o arco. Encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

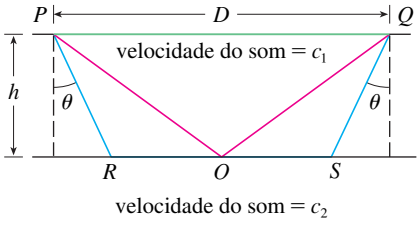


19. As velocidades do som c_1 em uma camada superior e c_2 em uma camada inferior de rocha e a espessura h da camada superior podem ser determinadas pela exploração sísmica se a velocidade do som na camada inferior for maior que a velocidade do som na camada superior. Uma carga de dinamite é detonada em um ponto *P* e os sinais transmitidos são registrados em um ponto *Q*, o qual está a uma distância *D* de *P*. O primeiro sinal a chegar a *Q* viaja ao longo da superfície e leva T_1 segundos. O próximo sinal viaja do ponto *P* ao ponto *R*, do ponto *R* para o ponto *S* na camada inferior e daí para o ponto *Q* e leva T_2 segundos para fazer este percurso todo. O terceiro sinal é refletido na camada inferior no ponto médio *O* de *RS* e leva T_3 segundos para chegar em *Q*.

(a) Expresse T_1, T_2 e T_3 em termos de D, h, c_1, c_2 e θ.

(b) Mostre que T_2 assume o seu valor mínimo em $\operatorname{sen}\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponha que $D = 1$ km, $T_1 = 0{,}26$ *s*, $T_2 = 0{,}32$ *s* e $T_3 = 0{,}34$ *s*. Encontre c_1, c_2 e h.



Observação: Os geofísicos usam essa técnica para estudar a estrutura da crosta terrestre, quando fazem prospecção de petróleo ou examinam falhas na estrutura do terreno.

20. Para quais valores de c existe uma reta que intercepta a curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

em quatro pontos distintos?

21. Um dos problemas propostos pelo marquês de l'Hôspital em seu livro de cálculo *Analyse des infiniment petits* está relacionado a uma polia presa ao teto de um quarto no ponto C por uma corda de comprimento r. Em outro ponto B no teto, a uma distância d de C (onde $d > r$), a corda de comprimento ℓ é amarrada passando pela polia em um ponto F e tendo preso a si um peso W. O peso é solto e encontra sua posição de equilíbrio em D. Como l'Hôspital argumentou, isso ocorre quando a distância $|ED|$ é maximizada. Mostre que, quando o sistema alcança o equilíbrio, o valor de x é

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que essa expressão independe de W e ℓ.

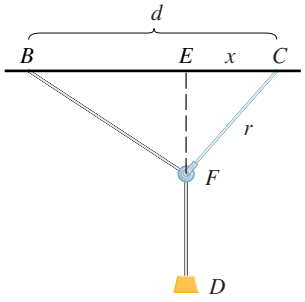
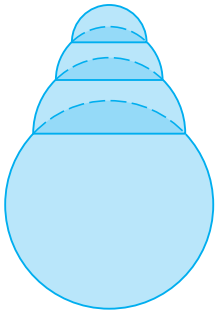


FIGURA PARA O PROBLEMA 21

22. Dada uma esfera de raio r, encontre a altura da pirâmide de menor volume cuja base é quadrada e cuja base e faces triangulares são todas tangentes à esfera. E se a base da pirâmide fosse um polígono com n lados e ângulos iguais? Use o fato que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}Ah$, onde A é a área na sua base.)

23. Suponha que uma bola de neve derreta de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional a área de sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume original, quanto demorará para a bola de neve derreter completamente?

24. Uma bolha hemisférica é colocada sobre uma bolha esférica de raio 1. Uma bolha hemisférica menor é então colocada sobre a primeira bolha. O processo continua até que sejam formados n compartimentos, incluindo a esfera. (A figura mostra o caso para $n = 4$.) Use a indução matemática para demonstrar que a altura máxima de qualquer torre de bolhas com n compartimentos é dada pela expressão $1 + \sqrt{n}$.